



Polite



S. VI.

1. Planum Velocitatis quid sit? vid. pag: 57.
2. velocitas finalis. pag: 57.
3. Scala Velocitatis. pag: 59.
4. Scala Velocitatis reciproca. ibid.
5. Planum Spaciorum ibid.
6. Scala temporum ibid.
7. Scala virium pag. 72 & seqq.
8. Planum virium. pag: 72 & seqq.

Functionem, de qua sermo est pag: 59
 Eulerus in Introductione sua in Analysis
 infinitorum Lib. I. pag: 4 vocat sic describit
Functionis quantitatis variabilis est expressio
 analytica quomodocumque composita ex illa
 quantitate variabili & numeris seu quan-
 titatibus constantibus.

Pag: 508. supponitur plana velocitatum
 APM, AQN Tab. I. Fig. 6. esse in triplicata
 ratione rectarum AP, AQ. Demonstrat hoc
 Guido Grandi in Sectionibus Conicis Propos.
 49 & 9 pag: 162. Corollar. 2.

Ead. pag: 508 dicitur rectangula APMR,
 AQNS eorundem planorum esse tripla. quod
 demonstrat Guido loco cit: corollar. 3. in
 Propositione

Matthesii. Statica, et Mechanica
corporum solidorum.
485.

Math. A. 159 m.

N O V A
S T A T I C E S
E L E M E N T A.

E.

S. VII.

107.

OF
ST. ALICE
BAPTIST.

ELEMENTA
STATICES
IN TYRONUM GRATIAM

tumultuario studio

CONCINNATA,

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

In Illustri Lyceo Neapolitano

MATHEMATUM PROFESSORE.



NEAPOLI MDCCXXVII.
Typis, & expensis Felicis Mosca,
Superioribus annuentibus.

ELLEMENTA

STATICS

IN TYRONUM GRATIAM

AVTHORIS

CONCINNA

AVCTORE

NICOLAUS DE MARTINO

Bayerische
Staatsbibliothek
München

IN HANNOVERA

MATHEMATICI PROFESSORIS



NEAPOLI MDCCXXV

Typis & expensis Petri Motta

Druckerey des Verfassers

PRÆCLARISSIMO VIRO
NICOLAO CYRILLO

In Illustri Lyceo Neapolitano

PRIMARIO MEDICINÆ PROFESSORI.



Illum primum cogitatio
mibi subiit, edendi in
commodum, & usum
studiosæ nostræ Juven-
tutis Elementa ista
Statice, statim ad quærendum ex
more Patronum aliquem, sub cu-
jus

jus auspiciis tutò possent lucem ad-
 spicere, Animum appuli. In eo au-
 tem inveniendo non adeo laboravi.
 Subinde enim Nomen Tuum, Vir
 Eximie, Academiae, Genti, & Ævo
 singulari est planè ornamento, ut
 illicò Tui sese mihi obtulerit con-
 templatio, ubi rem istam Animo
 mecum revolvebam. Illud potius
 pertimescendum mihi esset, nè
 vitio mihi verteretur, quòd Tan-
 tum Virum exiguo isto libello, non
 aliâ forsitan re, quàm argumen-
 ti sui magnitudine, commendando,
 auferim compellere. Neque enim
 adeò hebes à Natura ingenium na-
 ctus sum, ut ipse quoque non
 videam, opusculum istud longè
 infra tuam dignitatem subsistere.
 Namque, siue solidam reputem
 rerum, qua polles, cognitionem,
 non ullis coarctatam terminis, sed
 adeò

adeò latè patentem , ut ea , quæ à munere tuo procul esse videntur , primum in illa locum obtineant ; sive præclaras animi tui dotes considerem , quæ tales , tantæque sunt , ut ad eas pro dignitate pertexendas vix primi Oratoris vires sufficerent : non possum candido non pudore suffundi , quod præsens Opusculum Nomini Tuo dicatum in lucem depromam . Et ultrò quidem à tanto conatu destitissim , nisi ad id audendum me impulisset summa humanitas tua , qua factum , ut posthabitis gravioribus curis non dedignatus es Opusculi hujus primas paginas oculis , & animo perlustrare . Neminem etenim latet , quòd sicuti in humanis , quas vocant , litteris eos omnes , qui hoc nostro Cælo suum illis dedere

nomen , longè antecellis ; ita &
 humanitate Te ipsum vincas , ac
 superes . Et hoc quidem argu-
 mento cuique esse potest , eam ,
 quam profiteris , eruditionem ,
 non fictam esse , ac simulatam ,
 sed veram , ac solidam , dignamque
 Viro , qui Christiani Nominis men-
 suram gestit implere . Neque enim
 ex eorum numero es , qui statim ac
 è Vulgi sordibus sunt educti , &
 totâ Urbe probatos se esse sentiunt ,
 non omnium Hominum sustinent ad-
 spectum , refugiuntque illos , quos si-
 bi ipsis indignos esse mendosè pu-
 tant , tristi etiam supercilio eosdem
 intuentur ; quin tanta in Te est
 comitas , tanta benignitas , ut ne-
 mo tam humilis existat , cui ad
 consuetudinem , & familiaritatem
 tuam facilis accessus , aditusque
 non pateat . Argumentum etiam ip-
 sius

*sius Opusculi non leviter me impu-
lit, ut Tuum ei Nomen inscri-
berem: nempe quòd Sanioris
Philosophiæ Specimen exhibens,
nequeat Tibi gratiæ, & oble-
tamento non esse. Neminem quip-
pe Gentium latere arbitror, quan-
tum Operæ illustrandæ Philosophiæ
Naturali quotidie conferas, dum
publicis tuis prælectionibus, non
modò illam à barbarie vindicare,
sed eandem ita quoque cum Ma-
thesi conjunctam ostendere studes,
ut satis sit Te ex Cathedra præle-
gentem audire, quòd cuique pateat,
immense quantum Mathesis Natu-
ralibus conducat Disciplinis. Id
testatur maximus ille ardor, qui
in illustri nostro Lyceo circa Disci-
plinas Mathematicas nostris bisce
temporibus studiosæ incessit Ju-
ventuti: Neque enim aliunde na-
ta*

ta cupido illà, quàm quia Naturalem Philosophiam ex Matheſi unice pendere cunctis in diem ostendis. Sed & nostra res hasce pertractandi ratio, quam novi Tibi non displicere, in causa quoque fuit, ut Tui Nominis splendore libellum istum, undique tenebris circumseptum, auferim illustrare. Etsi enim naturæ arcana nullo modo rimari Nos posse, nisi Matheſeos beneficio, & Tibi, & aliis persuadeas; eos tamen, qui causis physicis omninò neglectis, ad Matheſim toti confugiunt, haud æquo animo ferendos esse arbitraris, ut qui non tam Philosophiam Naturalem tradere, quàm Matheſim ipsam abstractam, & à rerum natura præcisam excolere videntur. Id igitur vitii quum ex ipsa Tui sententia studuerim in hoc

Opuscu-

Opusculo præcavere, facile Auctor
 ipse mihi fui, laborem hunc meum
 non adeò fore Tibi displiciturum,
 nec adeò Te mihi succensurum,
 quod Nomen Tuum præseferat. Cæ-
 terum, si hac in re summoperè à me
 peccatum existimes, memoria reco-
 las velim, maximam culpæ partem
 Te ipsum sustinere, ut qui rerum
 optimarum æstimator quidem exi-
 mius, nugis nostris paulò impen-
 sius faves. Vale.

Tui

Addictissimus Famulus
 Nicolaus de Martino.

EMINENTISSIMO SIGNORE

F Elice Mosca , supplicando , esponde à V.E. , come desidera dare alle stampe un' Opera Matematica intitolata : *Elementa Statices in Tyronum gratiam conscripta*; composta dal Sig. D. Nicolò di Martino, Pubblico Lettore di Matematica in questa Università di Napoli . La supplica per tanto à commettere la Censura di essa à chi meglio li parerà , e l'averà à grazia , ut Deus.

Rev. D. Joseph Bonocore Philosophiæ, & Matheseos Prælector in Venerabili Seminario Archiepiscopali, revideat, & referat. Neap. 23. Februarii 1726.

ANTONIUS CANONICUS CASTELLI
VICARIUS GENERALIS.

D.P.M.Giptius Canonicus super editione librorum Deputatus .

EMINENTISSIME DOMINE

Quod mihi imperasti, ut nova hæc *Elementa Statices in Tyronum gratiam conscripta* perlegerem, id eâ, qua potui, diligentia executus sum. Nihil equidem in iis inveni, quod vel Religioni, vel moribus Christianis adversetur; multa verò, quibus non Tyronum modo ingenia excolantur, sed etiam oblectentur eorum, qui se diu multumque in ejusmodi studiis exercuerunt, ob summam in rebus difficilissimis perspicuitatem cum brevitate doctissimi Auctoris miro studio, industriâque conjunctam. Quamobrem è re publicâ esse maximè censeo, si typis edita divulgentur, nisi tamen Eminentiaæ Tuæ aliter videatur. Ex Ædibus Seminarii. 1X. Cal. Martias.

Eminentiaæ Tuæ.

Addictiss. atque obsequentiss. Servus
Joseph Buonocore.

Attenta supradicta relatione Imprimatur.
Neap. 22. Maji 1726.

ANTONIUS CANONICUS CASTELLI
VICARIUS GENERALIS.

D. P. M. Giptius Can. Dep.
EMI-

EMINENTISSIMO SIGNORE.

F Elice Mosca, supplicando, espone à V. E.^{ss.}, come desidera dare alle stampe un' Opera Matematica intitolata: *Statices Elementa in Tyronum gratiam conscripta*, composta dal Sig. D. Nicolò di Martino, Pubblico Professore di Matematica in questa Regia Università di Napoli. La supplica per tanto à commettere la Censura di esso à chi meglio li parerà, e l'averà à grazia ut Deus.

Rev. D. Jacobus Grazini videat, & in scriptis referat.

MAZZACCARA REG. ALVAREZ REG.
PISACANE REG. CRIVELLI REG.
VENTURA REG.

*Provisum per S. E. Neap. die 26. Martii
1726.*

Rinaldus.

 EMINENTISSIME PRINCEPS.

Opus Mathematicum Elementorum Statices compositum à D. Nicolao de Martino in nostro Lyceo Matheſeos Antecessore mihi Eminentiae Tuae Imperio censuræ causa commissum, dignum profecto est,

est, ut in bonum cupidæ Scientiarum Juventutis, cui dirigitur, & in Civitatis hujus ornamentum in publicam lucem exeat. In eo enim, non solum nihil continetur, quod Principis jura, bonosque mores lædat, sed à Præstantissimo Auctore ità illustriora superioris, & hujus ævi inventa Staticam Scientiam spectantia suis verè sublimibus excogitatis concinnè copulantur, ut methodi mirabili uniformitate, & perspicuitate ab una eademque Mente omnia primitus prodiisse videantur. Opus præterea absolutissimum est, ut non tantum elementi, quemadmodum modestissimus Auctor scripsit, sed Staticæ Disciplinæ plenissimi commentarii loco haberi mereatur. Neapoli die 28. Aprilis. 1626.

Additissimus famulus
Jacobus Grazini.

Visa dicta relatione imprimatur, verum in publicatione servetur Regia Pragmatica.

ALVAREZ REG. PISACANE REG.
CRIVELLI REG. THOMASI REG.
VENTURA REG.

Provisum per S.Em. Neapoli die 29. Januarii 1727.

Rinaldus.

AD

QUamquam, Benevole Lector, Typorum correctioni Egomet operam dederim, adhuc tamen in Opusculi hujus editionem sphalmata nonnulla irrepperunt. Quæ mihi inter legendum sese obtulere, ea sunt, quæ sequuntur; sed alia fortasse erunt, quæ Mihi, rebus potius, quàm verbis attento, nequaquam innotuerunt. Itaque, quemadmodum ista ut calamo corrigere velis, Benigne Lector, priusquam Opusculi lectionem aggrediaris, etiam atque etiam rogo; sic alia humanitati tuæ corrigenda relinquo.

Pag. 7. lin. 15. pro resolutione leg. revolutione.

Pag. 12. lin. 2. pro A. leg. C.

Pag. 64. lin. 18. pro Philosophi leg. Philosophi.

Pag. 65. lin. 21. pro perseverandi leg. prosequendi.

Pag. 75. lin. 3. pro PRV. leg. PRO.

Pag. 131. lin. 15. pro MNO leg. MON.

Pag. 134. lin. 3. pro MNO leg. MON.

Pag. 229. lin. 2. pro CD. leg. cD.

Pag. 241. lin. 18. pro B. leg. A.

Pag. 472. lin. 30. pro AM leg. AP.

PRÆFATIO. ^{xvij}



Univerſam Phifiologiam ex
Matheſi unicè pendere, nec
naturæ arcana ullo modo
rimari poſſe, niſi Mathe-
ſeos beneficio, notius eſt,
quàm ut poſſit inficiari: &
præſertim noſtris hiſce tem-
poribus, in quibus miſſis, non modò formis
ſubſtantialibus, & rerum qualitatibus oc-
cultis, in quibus poſita erat ſumma Philo-
ſophiæ Scholaſticæ, ab Ariſtotele, & Ara-
bibus derivatæ, verùm etiam fictis, & ina-
nibus hypotheſibus, quibus plus æquo in-
dulgebant Cartefiani, ſingula naturæ phæ-
nomana ad leges mathematicas exiguntur.

Veritatem iſtam norunt ipſimet Vete-
res, quippe qui, ſi Pappo præſtanda fides,
in rerum naturalium investigatione pluri-
mi Mechanicam faciebant: potiffimum au-
tem magnus Archimedes, qui præter geo-
metrica ſui monumenta, nullo non tempore
celebranda, & quamplurima inventa me-
chanica, quæ magnum ei nomen apud Re-
gem Syracuſanum compararunt; ſcripſit
etiam libros de æquiponderantibus, & inſi-
den-

dentibus humido, in quibus Statices, Hydrostaticesque rudimenta reclusit, & ex quibus omnis sanior Physiologia est deducenda.

Verum enim verò præclara ab Archimede in Philosophiam Naturalem sparsa semina diù sterilia jacuere, usque dum Galilæus Galilæi, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus Celeberrimus, illa eadem fecundata ad auras revocavit. Nam reſeratis rursus clavi geometricæ naturæ claustris, non aliam philosophandi rationem Lynceus iste Philosophus sectandam sibi proposuit, quàm quæ mechanicis innitur fundamentis. Unde non modo Principia Archimedeæ luculenter exposuit, sed novam quoque sibi condidit de motu scientiam, veramque itidem methodum Philosophis aperuit, qua rerum causæ mechanicæ sint indagandæ.

Et quidem, tametsi Veteres summoperè Mechanicam excoluerint, ejusque fructus uberrimos, non in vitâ civili tantum, verum etiam in rebus naturalibus degustaverint; vastissimæ tamen scientiæ de motu corporum, ad ritè philosophandum apprimè necessariæ, non alius velut Antesignanus haberi debet, quàm Galilæus Galilæi. Fatebantur etenim Veteres, naturam esse principium motus, & quietis; atque aded ignorato motu, naturam ignorari. Verum circa motum solum ferè nomen ipsis innotuit, inde

indeque factum, ut nec etiam genuina Mechanices principia in comperto habuerint.

Primus itaque Galilæus scientiam istam de motu tradere aggressus est. Sed Mathematicorum more neglexit quæstiones illas abstractas, ex quibus nullus in rebus physicis usus eruitur, quæque potius ad Metaphysicam sunt relegandæ; cuiusmodi sunt illæ, quæ pertinent ad naturam, & originem motus. Quid enim sit motus, maluit supponere, quàm accuratâ definitione prosequi. Est quippe motus ex earum rerum numero, quas nemo non intelligit; sed quas velut simplices, & in suo genere primas nemo potest accuratè definire.

Similiter, neque etiam causam, sive originem motus inquirere studuit. Enim verò ad agendum more mathematico de motu corporum, satis est, quod detur, aut dari possit motus in hac universitate rerum. Et quâquam nonnulli eò pervenerint insanix, ut motum omnem, tamquam rem impossibilem, à corporibus sustulerint, & argutias quasdam proposuerint, quibus illius impossibilitatem adstruere sibi visi sunt; digni tamen sunt potius, ut risu excipiantur, quàm ut iis refellendis tempus teratur inutiliter.

Jam motus omnis, vel est æquabilis, vel variabilis. Dicitur motus æquabilis, cujus quantitas eadem perpetuò manet; dicitur

variabilis, cujus quātitas mutatur indefinēter. Interim Galilæus aperuit quidem nobis principaliora motus æquabilis symptomata; verum quantum ad motum variabilem, rem non generaliter pertractavit; sed ejus tantum variabilis motus affectiones erudito orbi impertivit, qui æqualibus temporis particulis æqualia patitur velocitatis incrementa, vel decrementa, quemque proinde motum æquabiliter acceleratum, vel retardatum appellavit.

Nimirum existimabat Vir Clarissimus, vim, quam dicimus gravitatis, agere in corpora gravia eādem semper, & constanti ratione; adeoque motum gravium esse æquabiliter acceleratum in descensu, æquabiliter retardatum in ascensu. Quocirca, etsi tam accelerati, quàm retardati motus infinitæ esse possint variationes; quia tamen in hac rerum universitate locum tantum habere credidit motum æquabiliter acceleratum, vel retardatum: hinc factum, ut de istâ tantum specie motus variabilis agendum sibi proposuerit.

Non abludere autem à vero istiusmodi hypothesim, quòd vis gravitatis agat in corpora gravia eādem semper, & constanti ratione; confirmarunt deinde experimenta tum ipsius Galilæi, cum Hugonii, & Riccioli. Unde, etsi Veteribus innotuerit, gra-

via

via inter descendendum naturalem suum motum accelerare, quum illud satis superque quotidiana edoceat experientia; attamen, quòd motus ille subinde acceleretur, ut spatia æqualibus temporibus descripta sint velut numeri impares, ab unitate se consequentes, eademque ab initio motus computata sint in duplicatâ temporum ratione: id quidem feracissimo Galilæi ingenio debetur.

De motu porrò gravium egit Galilæus, tam quum descendunt per plana verticalia, sive recta ad horizontem, quàm quum descendunt per plana utcumque ad horizontem inclinata. Et quamquam in demonstrandis legibus descensus per plana inclinata supposuerit, gradus velocitatis ejusdem mobilis, per diversas planorum inclinationes acquisitos, tunc esse æquales, quum eorundem planorum elevationes, seu altitudines æquales sunt; non defuerunt tamen deinceps Viri præstantissimi, qui principium istud suâ etiam ratione demonstrarunt, & Galilæi adeò doctrinam de descensu gravium ab hac labe vindicarunt.

Præterea idem Galilæus aperuit etiam leges descensus, quum grave corpus vi gravitatis fertur per plura plana contigua, diversimodè ad horizontem inclinata; verum in hypothese, quod concursus planorum non

impediat motum gravis descendenti; sed tantum ejus directionem mutet. Interim, quia hypothesis ista multum abest, ut tuto possit in Physicam admitti; ab eâ discessit Clarissimus Varignonius, rationemque determinavit, quam velocitas in descensu per planum primum acquisita habet ad eam, cum qua ingreditur planum alterum: nempe quod sit, ut radius, sive sinus totus ad sinum complementi ejus anguli, quem mutuo occurso plana constituunt.

Ex doctrinâ de descensu gravium plura alia collegit Galilæus, eaque Veteribus prorsus ignota. Nimirum primò leges, quæ observari debent in motu pendulorum, per arcus circulares oscillantium, puta quod pendulum eundo, & redeundo continuas oscillationes perficere debeat; quod velocitas penduli in puncto infimo sit, ut subtensa arcus, quem descendendo describit; quod tempora oscillationum duorum pendulorum, in similes arcus excurrentium, sint in subduplicatâ ratione suarum longitudinum; & denique, quod ejusdem penduli vibrationes exiguæ, etsi inæquales, ad sensum sint isochronæ, sive æquiditurnæ.

Postremæ legis beneficio adhibuit primus omnium Galilæus pendula in observationibus physicis, & astronomicis, quæ accuratam temporis mensuram requirunt. Ejus
exem:

exemplo ductus Hugenius horologia ipsa automata pendulis extruxit, & experientia comprobavit, ejuscemodi horologia longe superare priora illa, quorum libratores horizontales erant. Sed quoniam talibus horologiis neque etiam exacta temporis mensura haberi poterat, novum protulit horologiorum genus laudatus Hugenius, faciendo nempe, ut grave pendulum non per circuli circumferentiam, sed per cycloidis perimetrum ferretur.

Et si enim ejusdem penduli oscillationes exiguae ferè, & ad sensum sint æquidistantiae; attamen, quia non sunt omnimodè, ac geometricè tales, semper erit inter singulas oscillationes exigua aliqua differentia, nec proinde pendulorum motu circulari exactè tempus potest mensurari. Unde, quum demonstraverit Hugenius, tempora descensus per arcus cycloidis, cujus vertex est punctum immum, inter se æqualia esse; collegit exinde isochronas esse pendulorum oscillationes omnes, si utique non in circumferentiæ circuli, sed in cycloidis arcubus perficerentur: proindeque eò vires omnes intendit, ut methodum excogitaret, qua mediante posset grave pendulum per cycloidis perimetrum ferri.

Id eum manuduxit ad doctrinam de lineis evolutis, quæ Curvarum Geometriam

mirum in modum locupletavit. Inde enim innotuit Geometris, lineas curvas non modò considerari posse, velut polygona laterum infinitorū, quorum unumquodque esset indefinitè parvum; verūm etiam velut aggregata infinitorum arcuum, qui omnes sint indefinitè parvi, & ad totidem circulos diversos referantur. Fœcunda sanè principia, ex quibus velut ex fonte uberrimo curvarum proprietates omnes prono alveo profluunt, & quorum ope admiranda problemata summâ solertiâ resolvuntur!

Ex doctrinâ de descensu gravium collegit etiam Galilæus ea, quæ ad motum spectant projectorum. Etsi enim nemo ex Veteribus non viderit, gravia dum ab impellente manu projiciuntur, non rectam, sed curvam lineam describere; nemo tamen naturam illius curvæ determinavit. Primus itaque Galilæus eam definire aggressus est, & ex cognitâ gravium acceleratione collegit curvam, quam projecta describunt, illam ipsam esse, quam parabolam Veteres appellarunt: unde postea omnia, quæ pertinent ad projectorum motum, nullo negotio geometricè definivit.

Galilæo etiam debetur doctrina de resistantiâ solidorum, tum horizontaliter, cū verticaliter suspensorum. Constat nempe experiētiâ, machinas, quæ in parvis
ela-

elaboratæ, felicem obtinent eventum, in magnis eâdem proportionem constructas, non æquè feliciter effectus suos sortiri. Id communiter rejiciebatur in defectus inevitabiles artis manualis, qui sæpessæpiùs veram, solidamque rerum theoriam apud vulgus hominum miserè dedecorant. Sed observavit Galilæus, diversitatem istam longè majorem esse, quam quæ ex solâ istâ causâ repeti posset. Itaque aliud quidpiam adesse conjecit, ex quo illa esset differentia deducenda: id, quod dum sedulò perquisivisset, pervenit tandem ad doctrinam de resistentiâ solidorum, Physicis ante ipsum penitus incognitam.

Hujusmodi doctrinam profecutus est deinceps paulò fusius Celeberrimus Galilæi Discipulus, Vincentius Viviani, in quodam opere suo posthumo, quod perfecit, notisque suis illustravit Abbas Guido Grandius in Pisano Lyceo Mathematicum Professor Eximius. Sed quoniam, tam Galilæus, quàm Discipulus ejus supposuerunt, fibras sectionis æqualiter tendi, tam in suspensione solidi verticali, quàm quum idem solidum suspenditur horizontaliter; considerant Clarissimi Viri Leibnitius, & Mariottus fieri posse, ut id nequaquam sit verum. Unde doctrinam istam de resistentiâ solidorum ad majorem perfectionem perduxerunt;

runt ; quandoquidem posuerunt , tensiones fibrarum æquales esse in suspensione verticali , sed esse proportionales distantis suis ab hypomochlio in suspensione horizontali.

In eâdem doctrinâ de resistantiâ solidorum illud etiam consideravit Vir Acutissimus Jacobus Bernoullius , fieri nimirum posse , ut non omnes fibræ sectionis , in qua vis resistantiæ consideratur , tendantur , sed superiores quidem tensionem , inferiores vero pressionem patiantur . Atque hæc consideratio , haud equidem contemnenda , manuduxit eum quoque ad contemplationem novi cujusdam centri , de quo nemo adhuc cogitaverat . Enim vero , quum fibræ superiores extensionem , compressionem inferiores patiantur ; aderit proculdubio inter eas fibra aliqua , quæ nec tensionem subibit , nec pressionem . Unde punctum sectionis , ex quo egreditur fibra ista , centrum tensionis Vir Acutissimus vocitavit .

Non inficior , Galilæum in nonnullis rebus particularibus humanam imbecillitatem ostendisse ; veluti quum credidit , lineam celerrimi descensus esse circumferentiam circuli , & laminam elasticam , perinde ac funem , vel catenulam , flecti in curvam parabolicam . Sed hujusmodi sphalmata Viso summo nequaquam vitio vertenda sunt ,
mulo

multumque abest, ut nomen ejus, ac gloriam minuere possint. Enim verò Galilaei temporibus profundissimâ adhuc caligine tecta latitabat methodus indefinitè parvorum, quæ sola subtilioribus hisce speculationibus felicem aditum præbet.

Innotuit quippe Geometris, lineam celerissimi descensus esse cycloidem, idque per Clarissimos Viros Newtonum, Leibnitium, Hospitalium, & Bernoullios Fratres, postquam comperti fuerunt calculus differentialis, & integralis, quibus prædicta indefinitè parvorum methodus administratur. Nec nisi iisdem calculis mediantibus licuit etiam laudatis Fratribus Bernoulliis, ex omnibus cycloidibus, quæ incipientes ab eodem puncto, secant eandem rectam positione datam, sive verticalem, sive utcunque ad horizontem inclinatam, determinare eam, per quam grave corpus descendendo perveniat à dato puncto ad datam illam rectam tempore brevissimo; hocque problema extendere etiam in casu, quum linea positione data, non est recta, sed curva quævis geometrica, quumque loco cycloidum dantur curvæ aliæ similes inter se.

Ejusdem methodi beneficio determinarunt quoque Geometræ post Galilæum naturam, tam curvæ elasticæ, quàm curvæ catenariæ: comperientes etiam, illam eandem esse

esse cum curvâ linteï, quam scilicet induit linteum stagnante aliquo liquore homogeneo compressum, quotiescumque vires laminam tendentes proportionales sunt ipsis tensionibus; istam eandem cum curvâ velariâ, hoc est cum eâ, in quam velum vento tumidum flectitur, in hypothesi, quod catenula sit gravitatis uniformis, graviumque directiones sint parallelæ. Unde mirari non subibit, quodd in hisce speculationibus deceptus fuerit magnus Galilæus: nempe quia vulgari Geometriâ, quæ Galilæi tempore sola obtinebat, hæc perscrutari omnino impossibile est.

Quantum ad motum fluidorum, scilicet Hydrostaticam, non aliud fere Galilæus tradidit, quàm quod docuit Archimedes in tractatu de insidentibus humido. Verùm, quum singulare phænomenon, ab Olitore quodam acceptum, Philosophos edocuerit, aquam in antliis tractoriis ultra octodecim cubitorum altitudinem attolli non posse; non tantùm Torricelliani tubi peperit experimentum, verùm etiam ansam dedit, ut Hydrostatices principia ad aerem traducerentur, novaque adeò scientia conderetur, quæ Aerostatices nomine potest insigniri.

Quum enim Evangelista Torricellius, apud Magnum Hetruriæ Ducem in munere mathematico Galilæi successor eximius,
phæ-

phænomenon illud sedulò mente revolverit; pro eo, quo erat, mentis acumine conjecit, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis tractoriis non aliunde oriri posse, quàm à determinatâ atmosphærae pressione: qua de re ut certior fieret, cum hydrargiro rei periculum fecit, & ut conjecit, omninò respondit eventus. Sed hoc idem plenius deinde confirmarunt Viri Celeberrimi Pascalius, Boylius, Borellus, & Mariottus, quorum opera notiora sunt, quàm ut hic à Nobis recenseri debeant.

Circa aerem porrò, non modò illud innotuit, eum grave esse, atque adedò legibus fluidorum gravitate suâ agentium subjici debere, verùm etiam peculiarem habere affectionem, quam nequaquaquam sibi vindicant fluida reliqua: nimirum vi elasticâ præditum esse, qua non solum continuò se expandere conatur, sed ad majus, quam antea occupabat, spatium reapse se expandit, ubi nullo corpore ambiente impeditur; ut ostendunt experimenta quamplura à Boylio, Mariotto, Jacobo Bernoullio, aliisque cautis observatoribus tentata, & foelicer ad exitum deducta.

Hisce autem experimentis non solum constitit, aerem vi elasticâ præditum esse, sed innotuit etiam hanc vim expansivam
aeris

aeris ed majorem esse, quod major est aeris densitas; & vicissim ed minorem, quod densitas aeris est minor. Unde ed vires omnes intenderunt Viri praestantissimi, ut rationem indagarent, quae est inter aeris elasticitates, & ejus densitates; multisque accuratis experimentis comperierunt, densitates aeris viribus comprimentibus, hoc est elasticitatibus ejus quam proximè proportionales existere.

Hæc igitur omnia, ad scientiam de motu pertinentia, Galilæo debentur. Sed ultro adhuc eadem de motu scientia à subsequen-
tibus Geometris evecta fuit. Ad leges quippe, quæ in mutuâ corporum collisione observantur, nequidem respexit Galilæus. Eas itaque definiendas susceperunt Clarissimi Viri Johannes Wallisius, Christophorus Wrennus, & Christianus Hugenus, tam pro corporibus inertibus, quàm pro corporibus elasticis, sive actuosis. Etsi enim ante hos suas quoque leges in occursum corporum observandas proposuerit Cartesius, ab iis tamen ipsi ejus Discipuli discesserunt; quandoquidem eas collegit ex duobus principiis, quæ cum ratione, & experienciâ pugnant omnino: nempe quod corpora propter quietem vim habeant ad resistendum; & quod in corporibus congregientibus eadem semper perseveret quantitas motus.

Similiter, etsi de motu pendulorum egerit Galilæus, nonnisi tamen pendula simplicia consideravit. Nam doctrina de motu pendulorum compositorum, quæ eò tota redit, ut inveniatur centrum oscillationis, hoc est longitudo penduli simplicis, composito isochroni, Christiano Hugenio tota debetur. Etsi enim problema istud de inveniando centro oscillationis celebre fuerit inter Geometras usque ab ætate Cartesii, perfectam tamen, ac generalem ejus solutionem primus litterario orbi communicavit laudatus Hugenius, quam deinde excoluerunt magis, & ab omni scrupulo vindicarunt Bernoullii Fratres, & post eos Hermannus in suâ Phoronomiâ.

Corpora, quæ in orbem revolvuntur, recedere conari à centro motus per tangentem, id quidem suboluit Galilæo; verum leges istius conatus centrifugi, saltem in eo casu, quum corpora motu æquabili, ac uniformi circulariter moventur, idem Hugenius primum aperuit, ex quibus etiam collegit insignia quædam theoremata circa motum conicum pendulorum. Et quamquam hæc omnia sine ulla demonstratione impertiverit erudito orbi in calce sui tractatus de horologio oscillatorio; ipsas tamen Auctoris demonstrationes adspexit Respublica litteraria in suis operibus posthumis

humis, in quibus peculiare de vi centrifugâ Opusculum habetur.

Circa corpora, quæ in gyrum aguntur, aliam contemplationem instituit Isaac Newtonus: nimirum, quod sicuti ea per vim centrifugam recedere conantur à centro motus in quolibet orbitæ puncto per rectam, quæ orbitam in puncto illo contingat; ita in iis adesse debeat vis alia æqualis, & contraria, per quam vicissim retineantur in suis orbibus, quæque impediatur, ne abeant per tangentes. Hanc aliam vim ipse Newtonus vocavit centripetam, quia nempe per ipsam corpora petunt continuò punctum aliquod, tanquam centrum, veluti in projectis est vis gravitatis, per quam flectuntur in terram. Sed alii post ipsum eam vocarunt centralem: quo nomine ipsa etiam vis centrifuga potest designari.

Itaque de hisce viribus centripetis sibi potissimum proposuit agendum Newtonus in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis: qua ratione dici equidem pro dignitate non potest, quantum disciplinæ de viribus, & motibus corporum pomeria dilataverit. Quæcumque enim docuit Galilæus circa descensum gravium, & motum projectorum in hypothese gravitatis constantis, & uniformis, conatu inaudito ad suam generalitatem evehit, & cujuscumque ea esse debeant in
qua-

quacumque gravitatis hypothefi mirâ ſcler-
tiâ definivit.

Demonſtravit quippe Galilæus, gravia,
dum descendunt, æquabiliter accelerari,
hoc eſt æqualibus temporis particulis æqua-
lia velocitatis incrementa nanciſci; item-
que ſpatia, quæ percurrunt, computata ab
initio motus, eſſe ut quadrata, tum tempo-
rum, cùm velocitatum: verum id in hypo-
theſi, quòd urgeantur vi centripetâ, ſive
gravitatis uniformiter agente. At Newto-
nus proportionem inter ſpatia, velocitates,
& tempora in corporibus rectâ descenden-
tibus determinavit, quæcumque eſſet lex
vis centripetæ, ſive gravitatis, qua ipſa
corpora urgentur.

Similiter Galilæus demonſtravit, projecta
motu ſuo deſcribere debere lineam para-
bolicam; verum id in hypothefi, quod dire-
ctiones gravium ſint parallelæ, ipſaque gra-
vitas ſit conſtans, & uniformis. Sed Newto-
nus curvam, à projecto deſcribendam, defi-
nivit in quacumque virium centripetarum
hypotheſi. Et ſicuti ex oſtenſis à Galilæo
notum erat, vim, quæ requiritur ad deſcri-
bendam lineam parabolicam, directioni-
bus exiſtentibus parallelis, debere eſſe con-
ſtantem, & uniformem; ſic Newtonus ge-
neralem methodum protulit, determinan-
di vires, quibus circa datum punctum in

curvis datis projecta corpora moveri possint.

Neque modo egit Newtonus de motibus corporum, quæ viribus urgentur, tendentibus ad immobile centrum; verum etiam casum consideravit, quum corpora viribus centripetis se mutuò petunt, moventurque aded in orbibus, quorum axes angulari motu prorsum, vel retrorsum feruntur. Atque ex his porro omnibus verum Systema Astronomicum nobis delineavit. Nam & stellarum motus, orbitas, & periodos explicavit; & motuum lunarium inæqualitates ad calculum posuit; & principia nobis aperuit, quibus par illud miraculorum naturæ, nempe miranda cometarum phænomena stupendusque ille maris accessus, & recessus certitudine tantum non mathematicâ intelligi possint, ac explicari.

De iisdem viribus centripetis agendum susceperunt quamplures alii post Newtonum, ut Leibnitius, Bernoullii Fratres, Varignonius, aliique; sed vix quicquam iis addiderunt, quæ primus omnium circa hanc materiam feracissimo suo ingenio protulit Newtonus. Illud hîc reticere nolo, quàm oscitanter nonnulli in vulgus efferrant, viribus istis centripetis iterum qualitates occultas Scholasticorum ad auras revocasse præclarissimum Newtonum. Nam
et si,

etsi, dum de iis viribus agit, utatur voce attractionis; non uno tamen in loco discretis verbis monet Lectorem, se vires illas non physicè, sed mathematicè tantùm considerare, easdemque sermone philosophico impulsus veriùs, quàm attractiones vocari debere.) N3

Projectorum porrò motus supposuit Galilæus fieri in vacuo, sive in spatio non resistenti, quod nempe motus eorum nec accelerare posset, nec retardare. Atque hanc hypothèsim assumpsit, non quòd nesciret, ejusmodi medium resistendi facultate carens apud tellurem nostram non dari; sed quia non satis videbat, qua ratione Geometriæ legibus mediorum resistentiæ subjici possent. Id ipsum supposuerunt Torricellius, Borellus, aliique illius ævi Geometriæ Celeberrimi: tantòque lubentiùs ab hujusmodi mediorum resistentiis animum abstraxerunt, quòd existimarent, ex earum neglectu perexiguos errores, vixque sensibus perceptibiles subnasci.

Itaque Recentiores præclara Galilæi re-perta circa motus doctrinam perfecisse, & ad suam universalitatem revocasse non contenti, in id etiam dederunt operam, ut arduam istam materiam de motibus projectorum in mediis resistentibus erudito orbi notam facerent, ac exploratam. Nec equidem

res successu caruit. Nam post eximia hæc de re meditata præstantium Virorum Newtoni, Leibnitii, Hugonii, & Wallisii partim sine demonstrationibus edita, & breviter tantum indicata, partim etiam demonstrationibus munita; pertractavit idem argumentum tam fusè, ac solidè Clarissimus Varignonius in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis, ut vix habeas, quod in eo possis expetere.

Ad suam quoque universalitatem perduxerunt Recentiores Mathematici doctrinam Hugonii de motu pendulorum isochrono. Enim verò, ubi demonstravit Hugonius, pendulorum oscillationes, ut sint perfectè isochronæ, fieri debere in arcubus cycloidis, cujus vertex est punctum imum; supposuit gravitatē agere in pendulum eadem, & constanti ratione, illudque urgere directionibus parallelis. Verum, qui Hugonium secuti sunt, de motu pendulorum isochrono pertractarunt in quacumque gravitatis hypothesis: neque modo curvam generaliter determinarunt, in cujus perimetro fieri debeant oscillationes isochronæ ex datâ lege gravitatis; sed & vicissim methodum excogitarunt generalem definiendi legem gravitatis requisitam ad hoc, ut pendulum suas perficere possit oscillationes isochronas in datæ curvæ perimetro.

Atque hac in re illud specialiter detectum est, quod sicuti in hypothesi gravitatis constantis, & tendentis ad punctum infinitè distans, oscillationes, ut fiant isochronæ, peragi debeant in perimetro cycloidis, cujus vertex sit punctum imum; ita in hypothesi gravitatis, directè proportionalis distantiae à centro virium, necesse sit, ut fiant in perimetro epicycloidis internæ: ob elegans istud theorema, jampridem ostensum à Newtono, quod vertice epicycloidis internæ deorsum spectante æqualia sint tempora descensus per quosvis ejus arcus ad verticem terminatos, quotiescumque grave descendens viribus urgetur, quæ undique tendentes ad centrum circuli immobilis, proportionales sunt distantis ab eodem centro.

Nec silentio reticebimus præclarum illud problema, Geometris à Leibnitio propositum, de inveniendâ lineâ, juxta quam si corpus descendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem versus accedat, & solum ab ipso Leibnitio, cùm ab Hugenio, & Bernoulliis Fratribus, comperientibus seorsim, quæsitam curvam esse secundam parabolam cubicam, modò eam corpus describere incipiat eâ velocitate, quam sibi comparasset, si utique rectâ descendisset per altitudinem, quatuor nonas partes parametri ejus parabolæ adæquantem: ita, ut pro-

blema sit impossibile, si requiratur, ut corpus motum in tali lineâ, descensum suum inchoet à quiete.

Atque hoc sanè problema eò magis memoratu dignum est, quod novis difficultatibus involutum rursus ab eodem Leibnitio Geometris propositum fuerit. Quemadmodum enim ejus Illustris Auctor primâ vice quæsit, ut corpus æqualibus temporibus æqualiter ad Horizontem, sive telluris superficiem accederet; ita deinde voluit, ut æqualibus temporibus æqualiter accederet ad punctum aliquod datum in axe curvæ, vel ab eo recederet. Neque verò novæ istæ difficultates præstantissimorum Mathematicorum animos deterruerunt: enim verò quæsitæ curva paracentrica, sive æquabilis accessus, vel recessus à puncto dato, definita fuit, non modò ab ipso Leibnitio, verùm etiam à laudatis Fratribus Bernoullis, quorum alter hoc in eâ præstantis invenit, quòd infinitas efficeret revolutiones, priusquam ad datum punctum perveniret.

Hoc idem problema ulterius etiam evexit Clarissimus Varignonius in Commentariis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis. Nam, quantum ad accessum corporis relatè ad Horizontem, petiit, ut is non modò fieri deberet in ratione temporum simplici, verùm etiam in qualibet aliâ temporum ra-

tio-

tione: idque, tum in hypothefi gravitatis constantis, & tendentis ad punctum infinitè diftans, cùm in aliâ quavis gravitatis fup-
 pofitione. Quantum verò ad corporis accelfum, vel recessum à puncto dato, non modò casum confideravit, quum punctum datum est in axe curvæ, sed etiam, quum in plano ejus curvæ extra axem existit; quin imò deinde ad eum quoque casum animum appulit, quum datum punctum extra curvæ planum reperitur.

Sed & eam quoque Statices partem, quæ de æquilibrio ponderum, vel potentiarum inter fe commiffarum agit, certatim excolere, & ad majorem perfectionem evehere tentarunt Recentiores Mathematici. Quandoquidem non modò leges istius æquilibrii ex principiis certis, & inconcuffis, nec à nemine fanæ mentis in dubium revocandis deducere conati funt; verùm etiam methodum excogitarunt valde facilem, ac expeditam, determinandi mediam directionem plurium potentiarum, quæ unum, idemque punctum trahant, hoc est lineam, secundùm quam agere debet in punctum illud potentia ex omnibus composita, quò eundem pariat effectum.

Licuit autem ipsis talem methodum excogitare beneficio præclari hujus theoremat-
 tis, quòd plures potentiæ, unum idemque

punctum trahentes, nequeant esse in æquilibrio, nisi punctum illud sit commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, quæ potentias illas longitudine suâ designant. Atque hoc quidem theorema, quemadmodum talem æquilibrii legem nobis suppeditat, qua meo judicio nulla dari possit vel simplicior, vel generalior; ita non alii ferendum est acceptum, quàm Illustri Leibnitio, utpote quod in aliquâ ejus epistolâ, jampridem ad Celeberrimum Wallisium datâ, sine demonstratione exhibetur.

Hujus itaque theorematitis præsidio, non modò determinarunt æquilibrium, & mediam directionem potentiarum, quæ uni eidemque puncto sunt applicatæ, verùm etiam earum, quæ diversis punctis alicujus inflexibilis corporis applicantur. Sed eum quoque casum considerarunt, quum corpora, quæ trahuntur à potentiis, flexibilia sunt, cujusmodi sunt fila, vel funes: qui in re hoc quidem theorema generale comperierunt, quòd media directio quocumque potentiarum, filum subinde trahentium, ut consistant in æquilibrio, transeat per punctum, in quo sibi mutuò occurrunt filii portiones extremæ, ita ut si potentiarum numerus augeatur in infinitum, ipsumque adeò filum flectatur in curvam, eadem media

dia directio transeat per concursum rectarum, quæ curvam tangunt in punctis extremis.

Preterea rationem determinantes, quæ est inter firmitates singularum fili portionum, illud etiam comperierunt, eandem in singulis fili portionibus firmitatem adesse, quotiescumque quælibet potentia dividit bifariam angulum, in quem ipsa filum flectit; idque quum contingit, mediam directionem omnium potentiarum dividere quoque bifariam angulum, quem extremæ fili portiones productæ constituunt. Ex quo facile fuit eis inferre, quum filum per infinitas potentias flectitur in curvam, eandem in singulis portionibus fili firmitatem reperiri, si cujusque potentia directio secet ad rectos angulos curvam, in quam flectitur filum; atque hoc in casu inventam iri mediam directionem potentiarum omnium, secando bifariam angulum, contentum sub rectis, quæ curvam in suis extremitatibus contingunt.

Neque verò putandum est, subtiles hasce speculationes inutiles esse, nec ullum ex iis usum colligi posse. Velum quippe ventito tumidum flectitur in curvam perinde, ac si traheretur ab infinitis potentiis, perpendiculariter ad curvam illam applicatis; quum omnis actio per lineam perpendicularem
ad

ad superficiem corporis patientis debeat æstimari. Quocirca Nautæ facili negotio poterunt determinare lineam, secundum quam ventus agit in velum: nimirum ducendo ad veli extremitates, siue cogitatione, siue chordarum ope, tangentes duas, & bisecando angulum, quem mutuò occursum constituunt; quandoquidem linea bisectionis erit illa, quam quærunt.

Mediæ istæ directiones ansam præbuere Amplissimo Viro Jacobo Bernoullio novum curvarum genus considerandi, quas lineas mediarum directionum vocitavit. Etenim, si filum per infinitas potentias, ei perpendiculariter applicatas, in curvam flectatur, prout augetur fili longitudo, augeturque numerus potentiarum, alia fiet, atque alia earum mediæ directio. Itaque curva, quam contingunt omnes istæ mediæ directiones, quæque constituitur per concursum duarum ex iis indefinitè proximarum, illa est quam mediarum directionum lineam appellavit; ejusque accidens præcipuum hoc est, ut convexitatis ejus in omni loco subdupla sit convexitas, quam in loco correspondenti habet curva, in quam flectitur filum.

Filum autem, cui infinitæ potentiaæ ad rectos angulos sunt applicatae, ostendente Johanne Bernoullio, Jacobi Fratris, talem in-

induet curvaturam, ut convexitas ejus in quolibet loco sit, ut potentia, quæ filum trahit in loco illo. Ex quo patet, curvam, in quam flectitur filum, tunc tantum esse circularem, quotiescumque potentiæ omnes, perpendiculariter ad filum applicatæ, inter se sunt æquales. Hinc velum vento tumidum in circuli circumferentiam flecti non potest, nec item linteum, quod stagnante liquore intumescit; quia utroque casu singula curvæ elementa à totidem aeris, vel liquoris filamentis premuntur quidem ad rectos angulos, sed æquales pressiones non subeunt, nec ided ab æqualibus potentiis trahuntur. Interim cognitâ lege pressionis, quam in curvæ elementa exerunt filamenta sive aerea, sive liquoris, facile fuit Johanni Bernoullio ex generali suo theoremate naturam curvæ deducere, quam sive velum, sive linteum cogitur induere.

Ex cognitis legibus æquilibrii quocumque ponderum, vel potentiarum, facem præeunte methodo indefinitè parvorum, nullo quoque negotio deduxerunt Recentiores Mathematici elegantem regulam Guldini, jam à Pappo disertè indicatam, quod figura, quæ oritur ex revolutione cujuslibet magnitudinis circa rectam aliquam positione datam, æqualis sit factio ex magnitudine genetrice in viam sui centri gravitatis;

tis ; eandemque veram esse demonstrarunt, tum in figuris revolutione genitis, cum in iis, quæ alio quovis motu generantur, dummodò motus tali lege fiat, ut magnitudo genetrix insistant semper ad rectos angulos super lineâ, quam gravitatis suæ centrum motu illo describit. Sed exinde generales etiam quasdam methodos collegerunt, quibus facili negotio determinari posset centrum gravitatis in figuris regularibus, sive planis, sive solidis. Etsi enim innotuerit Veteribus, centrum istud in omnibus omnino figuris reperiri; attamen nullas ejus centri inveniendi regulas universales tradiderunt; sed id pro unaquaque figurâ peculiari quodam artificio indagare cogebantur.

In figuris, quæ moventur, præter centrum gravitatis, considerarunt etiam Recentiores Mathematici centrum percussionis, nimirum punctum illud, in quo omne figuræ momentum colligitur, & coaceruatur, quodque proinde tale est, ut si eo figura alicui occurreret obstaculo, magis illud percuteret, quàm si alio quovis puncto in idem obstaculum impingeret. Hujusmodi quippe punctum, quum subinde in figurâ situm esse debeat, ut momenta omnium elementorum, ad unam ejus partem existentium, æquilibrentur in puncto illo

illo cum momentis elementorum, quæ ad partem alteram existunt, confundetur quidem cum ipso gravitatis centro, hoc est cum puncto illo, in quo colligitur, & coacervatur vis gravitatis, quotiescumque figura subinde ponitur moveri, ut singula ejus elementa eâdem ferantur velocitate. Verum aliud, atque aliud erit à centro gravitatis, quum singula figuræ elementa diversis velocitatibus feruntur.

Itaque Recentiores Geometræ, quemadmodum methodos excogitarunt generales pro determinando centro gravitatis, ita quoque generales regulas prodiderunt pro definiendo centro percussionis. His regulis probè instructus Varignonius detexit in Commentariis Regiæ Sciētiarum Academiæ Parisiensis, quòd in doctrinâ de resistentiâ solidorum horizontaliter suspensorum, quam ipse loco citato ad suam universalitatem evexit, quemadmodum in hypothesi Galilæi, quòd omnes fibræ sectionis tendantur æqualiter, considerari debeat centrum gravitatis sectionis resistentis; ita in hypothesi Leibnitii, & Mariotti, quod vires fibras tendentes eò majores sint, quòd magis distent ab hypomochlio, præter centrum gravitatis considerandum sit etiam centrum percussionis ejusdem sectionis: id, quod ipsis ejus hypotheseis præclaris Auctoribus

ribus nequaquam innotuit.

Neque modò inter Recentiores præstantissimi quique Geometræ doctrinam de motu corporum solidorum, sive consistentium evehere longiùs studuerunt; verùm etiam conati sunt ea, quæ ad motum pertinent corporum fluidorum, perficere, novisque inventis locupletare. Nam, ut præteream leges, quibus gravitant fluida, tum in subiecta plana, cùm in latera vasorum, quibus continentur, longe universalius ab ipsis expositas, quàm ab Archimede factum erat; & silentio itidem committam æquilibrium corporum solidorum in fluidis demersorum, vel innatantium, quod in omni fluidorum genere tradiderunt; determinare etiam aggressi sunt, tum firmitates, quæ requiruntur in tubis ad perferendas fluidorum pressiones, tum figuras, quas à fluidis stagnantibus induunt corpora flexibilia.

Præterea hanc de viribus fluidorum, à gravitate pendentibus, doctrinam ad aerem traducentes, novam, ut superius innuimus, scientiam condiderunt, Aerostatices nomine decorandam, quam vix nascentem subinde certatim excolere, & ad suum perducere fastigium conati sunt, ut in hoc argumento subsequuturis Mathematicis otium quasi fecisse videantur. Atque hæc porro scientia eo plu-

pluris, meo iudicio, æstimanda est, quia exinde facile addiscere possunt Tyrones, qua ratione res naturales ad leges mathematicas sint revocandæ.

Ulteriùs in fluidis consideravit quidem Archimedes pressiones, ab eorum gravitate pendentes, verùm ad motus eorundem, per foramina, utlibet vasis insculpta, erumpentium, nequaquam respexit. Hoc igitur argumentum, quod utilitate suâ nulli cedit, primus omnium expendere aggressus est Benedictus Castellus; quem secuti deinceps Balianus, Torricellius, Borellus, Mariottus, aliique paulò diligentius, nec sine fructu illud examinarunt. Neque verò ab ipsis penitus fuit exhaustum: enim verò Celeberrimus Gulielminus doctrinam istam ad maiorem perfectionem evexit, eamque ad fluminum motum ingeniosè etiam traduxit; tum deinde Varignonius in Commentariis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis hoc idem argumentum generaliter pertraxit, quæque in eo detexit, ad formulas quasdam universales, more suo, revocavit.

Ad hæc, quum de solidis in fluidis demersis vel innatantibus pertractandum suscepit Archimedes, mutuum tantum eorum corporum æquilibrium definire conatus est; ad effectus autem, ex eorundem collisione mutuâ dependentes, nequaquam animum
ap.

appulit. Hujusmodi itaque effectus expendere, & ad leges mathematicas revocare tentarunt etiam Recentiores. Nec equidem irritus fuit conatus ipsorum. Nam, & actiones, quas exerunt fluida, dum ad solida corpora alliduntur, & resistentias, quas ipsa solida in fluidis mota patiuntur, tum ratione figuræ, cum ratione ipsius motus, incredibili solertiâ determinarunt.

Etsi autem in hoc argumento summi quique ævi nostri Geometræ vires suas exercuerint, principaliora tamen inventa uni Newtono ferenda sunt accepta. Id verò, quod in hac re præcipuum est, & ad navium constructionem usui nobis esse potest, est determinatio figuræ, ex cujus circa axem revolutione tale oriatur solidum, quod in fluido motum secundum directionem sui axis, minus inveniat resistentiæ, quàm aliud quodvis eâdem longitudine, & latitudine descriptum solidum circulare. Hanc itaque figuram pro eo, quo pollebat, mentis acumine determinavit Newtonus; sed quum inventum absque ullâ demonstratione erudito orbi impertiverit, eam supplavit Illustris Hospitalius in Actis Lipsiensibus, & in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis.

Ex doctrinâ istâ generali de actione fluidorum in corpora solida, & de resistentiâ solidorum

lidorum, quam in fluidis subeunt, suborta est nobis alia paulò specialior de motu navium, vento impulsarum, quæ ad Nauticam Manuariam spectat. Hanc partem Nauticæ Scientiæ, longè utiliore illâ, quæ usum pixidis magneticæ respicit, excoluit primus omnium Dominus Renaldus. Verùm quæstio, inter ipsum, & Hugenum orta, pro determinandâ navis velocitate, ansam dedit Johanni Bernoullio, ut idem argumentum paulò diligentius expendere. Quumque noverit Theoriam Domini Renaldi corruere, tum quia non rectè defini- vit velocitatem navis, tum etiam quia nec deviationem ejus probè determinavit; novam Nauticæ Manuariæ Theoriam adinvenit, cujus specimen erudito Orbi impertivit in libro, cui titulum fecit: *Essay d'une nouvelle theorie de la Manoeuvre des Vaisseaux*.

Aliud etiam argumentum in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis geometricè tractare ausus est Illustris Newtonus: nimirum quibus legibus motus per fluida propagetur. Inter theoremata autem, quæ huc spectantia demonstravit, hoc quidem est præcipuum, quòd pulsibus per fluidum propagatis singulæ fluidi particulæ motu reciproco euntes, & redeuntes accelerantur semper, & retardantur pro lege oscillationis penduli. Unde, quum soni, utpote à corpo-

ribus tremulis orti, nihil aliud sint, quàm aeris pulsus propagati; collegit exinde, partium sonori corporis vibrationibus alternis circumjectum aerem elasticum propelli, atque adeò densari nonnihil, tum verò relaxari, & in partes contrarias regredi: idque fieri, tum in aere ipsis contiguo, cùm per actionem istius in aere remoto, vicibus permutatis. Atque ex hoc progressu, & regressu partium aeris præcipua sonorum phænomena mirâ facilitate deduxit.

Motum quoque fluidorum circularem ad leges geometricas revocare tentavit idem Newtonus: qua in re duos casus consideravit. Primus est, quum fluidum uniforme, & infinitum agitur in orbem ab impulsu cylindri infinitæ longitudinis, qui circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur. Et secundus, quum fertur in gyrum ab impulsu sphaeræ, circa suum axem uniformiter quoque gyrantis. Invenit autem, quodd si pars fluidi unaquæque uniformiter in motu suo perseveret, tempora periodica partium fluidi in primo casu sint, ut ipsarum distantia ab axe cylindri; in secundo verò, ut quadrata distantiarum à centro sphaeræ. Unde, quum planetarum primariorum circa Solem revolventium tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro Solis, eademque regula ob-

tineat etiam in planetis secundariis ; collegit exinde phœnomena cœlestia aliâ ratione, quàm per Vortices, à Philosophis esse explicanda.

His igitur omnibus doctrinam de viribus , & motibus corporum locupletarunt Recentiores Mathematici . Jam alter nunc annus agitur , ex quo omnia ista Recentiorum inventa subinde in unum corpus congerere mihi proposui , ut ex paucis , iisque simplicibus principiis cuncta in eo essent ostensa, ac derivata . Etsi enim ante aliquot annos id summâ cum laude præstiterit Mathematicus Celeberrimus Jacobus Hermannus in suâ Phoronomiâ ; res tamen non ita cōfecta mihi videbatur, ut major ei lux, majorque rerum copia accedere non posset.

Verùm , quum opus istud non dum ad umbilicum sit perductum , quin ei perficiendo plures annos destinarem ; cogitatio mihi subiit , edendi interea in commodum , & usum studiosæ nostræ Juventutis aliquot ejus specimina sub nomine Statices, Hydrostatices, & Aerostatices . Ex quoniam consilium istud summo Mathematicum Professori Augustino Ariano , cujus provinciam vicario jure per quinquennium jam sustinui, non displicuit ; statim hæc Statices Elementa edenda curavi , editurus deinceps eâdem formâ Elementa , tum Hydrostatices , cum

Aerostatices, nisi quis ex transverso casus incurrat.

Jam nomine Statices eam voluimus intellectam facultatem, quæ motum gravium considerat, tum artificiosum, tum naturalem, tum denique violentum. Hinc ejus Elementa quatuor sectionibus complexi sumus. In primâ siquidem generaliora Statices principia præmittenda duximus; in secunda motum gravium artificiosum consideravimus; in tertia de motu gravium naturali sermonem instituimus; & in quarta denum ea, quæ pertinent ad motum gravium violentum, sumus prosecuti. In singulis autem sectionibus multò plura Lector habebit, quàm ex earum titulis primâ facie judicabit. Neque verò à materia, de qua agitur aliena ea esse comperiet; nam illa semper mihi placuit disciplinas pertractandi ratio, ut propriis suis locis singula committerentur.

Speciatim in prima sectione, ubi de communi gravium centro agendum nobis fuit, quæstionem de figurâ telluris conati sumus definire, & ex deprehensâ inæqualitate graduum terrestrium in extensione telluris secundum polos licuit nobis, mediante doctrinâ Recentiorum de lineis evolutis, breviter quidem, sed perspicuè demonstrare, tellurem esse oblongatam versus polos, &

non

non jam versus æquatorem. Inde verò innotuit Nobis, commune gravium centrum non esse merum punctum, quemadmodum huc usque existimatum fuit à Mechanicis, sed superficiem illam, quæ est evoluta superficiæ terrestris. Unde veram novimus rationem, cur pendulorum oscillationes evadant celeriores in iis locis, quæ magis ab æquatore recedunt.

Ad eam Statices partem, quæ agit de motu gravium artificioso, visum est nobis commodè referri posse doctrinam de legibus, quæ in mutuo corporum occurſu deprehenduntur. Crediderim leges istas à Nobis simplicius longè, & facilius expositas esse, quàm ab aliis huc usque factum erat; sed id Lectoris judicio committo. Audio circa hanc materiam nova quædam, nec adhuc ab ullo cogitata sese obtulisse Clarissimo Viro Johanni Baptistæ Lamberto, qui non modò inter nostros Philosophos & Mathematicos, verùm etiam inter externos locum suum mereatur; sed optandum esset, ut bono publico ea in lucem edere non gravaretur, ne scilicet cum Nos, cum nostri Nepotes iis frustraremur.

Cœterum, quum hæc Statices Elementa in Tyronum gratiam composita sint, mirum esse non debet, si nonnullæ demonstrationes provectoribus Geometris prolixæ nimis

mis videantur : nimirum , quia iis , quorum rationem præcipuam habuimus , non semper in potestate est , ea supplendi , quæ ex demonstrationibus brevitatis gratiâ rescantur . Sed mirum etiam censerî non debet , si eadem demonstrationes , suppresso calculo , per quem analyticè inventæ sunt , more Veterum compositæ ut plurimum afferantur . Enim verò in eâ semper sententiâ fui , ut quæ à Mathematicis analyticâ methodo per calculum inveniuntur , ea postea Tyronibus syntheticâ methodo sint proponenda .

Ut enim in privatis suis colloquiis sæpiùs dicere solent præclarus Consiliarius Constantinus Grimaldus , & Vir Eruditissimus Blasius Garofalus , uterque orbi litterario non uno nomine notus , præcipuus fructus , quem ex disciplinis mathematicis debent Tyrones haurire , haud quidem est cognitio earum veritatum , quæ in ipsis edocentur , sed perfectio mentis , qua ritè de rebus judicare , multòque meliùs ratiocinia sua componere possint . At verò istam mentis perfectionem , non tam demonstrationibus calculo institutis , quàm quæ syntheticâ methodo more Veterum fiunt , acquiri , notius est , quàm ut possit inficiari .

Hinc valde irascor iis , qui dum Juvenes in rebus geometricis instruere aggrediuntur ,

utun-

utuntur libris, in quibus res istæ calculo analytico sunt pertractatæ. Non inficior, calculum ad capacitatem mentis augendam valde prodesse, nec adeo sum demens, ut calculum è Geometriâ exulem optarem; sed hoc unum libenter expeterem, ut Tyrones unâ cum calculo in ratiociniis purè geometricis exerceantur. Nam, quemadmodum calculus mentis adauget capacitatem, ita ratiocinia purè geometrica mentem formant, ac perficiunt, eamque reddunt idoneam, tum in scientiis adipiscendis, cum in iis peragendis, quæ ad vitæ usum referuntur; ut præteream experienciâ mihi innotuisse, in rebus hisce multò magis Juvenes proficere, si utrâque methodo ad eas manuducantur, quàm si calculo tantùm insistant.

Denique illud hîc Lectorem monitum velim in his Statices Elementis frequentem esse usum curvarum in designandis viribus, velocitatibus, spatiis, temporibus, aliisque functionibus motus. Hanc verò designandâ rationem, jamdiu à Geometris usurpatam, à rerum, de quibus agitur, naturâ non abluere, abundè liquet. Res quippè illæ, prout quantitates sunt, nullâ possunt meliori ratione designari, quàm lineis rectis; At verò, quum ad puncta unius rectæ lineæ, per cujus portiones unum earum rerum genus de-

signatur, ordine applicantur omnes illæ rectæ lineæ, quæ genus alterum repræsentant; jam istarum linearum extremitates curvam quandam lineam efformabunt.

Hinc rectè Dominus de Tschirnhausen in Medicinâ suâ mentis & corporis observat, ad omne id, quod in tota Mathesi rarum aut absconditum est, detegendum, requirî tantùm, ut omnes curvas possibiles, quotquot concipi possunt, consideremus. Hac enim ratione facile erit, omnium Matheſeos objectorum relationes possibiles exhibere: adeo, ut si postea difficultas aliqua in particulari quadam ejus scientiâ occurrat, nihil aliud ad eandem solvendam opus sit, quàm curvam illam, quæ rei isti respondet, ostendere. Unde non inutiliter tempus terunt, qui in doctrinâ curvarum excolendâ omnem suam operam collocant.

Ex eo autem, quodd frequens sit usus curvarum in his Statices Elementis, factum est etiam, ut & methodus indefinitè parvorum crebrò in iisdem occurrat, quippe quæ in curvarum materiâ, summâ solertiâ, demonstrationes contrahit, ac faciles reddit. Hæc methodus iis, qui Euclidæis, aut Apolloniæis demonstrationibus sunt affueti, durior nonnihil videbitur, quàm ut ei statim possint acquiescere. Sed sciant velim, nihil in hac methodo adhiberi, quod ab ipsis etiam

Ve-

Veteribus non fuerit usurpatum. Nimirum supponitur curvam omnem considerari posse velut polygonum infinitorum laterum indefinite parvorum: id, quod ipsi Veteres assumpserunt, dum polygona duo, alterum circulo circumscriptum, alterum eidem inscriptum, per multiplicationem laterum, in circulum ipsum tandem abire supposuerunt.

Itaque methodus ista indefinite parvorum eo tota innititur, ut curvæ portio indefinite parva velut recta assumatur: quod quidem assumptum non solum à vero non abluere, sed ex ipsâ curvarum genesi sponte sua fluere, ostensum est à Nobis in Tractatu de Naturâ, & Proprietatibus Curvarum, nondum in lucem edito. Inde verò consequens fit, eundem curvæ arcum considerari posse velut portionem rectæ lineæ, quæ curvam ibidem contingit. Unde tangente eò usque productâ, donec diametro occurrat, fiet triangulum, diametro, ordinatâ, & tangente contentum, simile ei, quod ad illam curvæ portionem indefinite parvam constituit recta, quæ ex uno ejus extremo parallela ducitur diametro.

Uti verò hæc methodus facilius administrari possit, conati sunt Recentiores eam calculo quoque submittere. Est autem calculus hujus methodi duplicis quidem speciei

ciei. Alter etenim regulas tradit invenien-
di quantitatum continuè crescentium, aut
decrecentium momentanea incrementa, aut
decrementa. Alter vicissim docet, qua ra-
tione dati alicujus momentanei incrementi,
aut decrementi inveniri possit quantitas
crescens, aut decrescens, ad quam illud
pertineat. Regulæ primi calculi generales
sunt, nec ullibi remoram patiuntur; vicis-
sim verò regulæ alterius sunt speciales, nec
ad omnes casus se extendunt. Unde in
priori calculo nihil ampliùs desideratur; per
contrarium autem in altero excolendo nun-
quam Mathematicis otium futurum erit.

Duos istos calculos, numquam satis pro
dignitate commendandos, detexit primus
omnium Isaac Newtonus, Anglicæ Natio-
nis Decus, & Ornamentum. Sed quum eo-
rum se compotem esse certiore faceret
Geometram peritissimum Gulielmum Go-
thofredum Leibnitium, & litteris transposi-
tis hanc sententiam continentibus: datâ
æquatione, quotcumque fluentes quanti-
tates involvente, fluxiones invenire, &
vice versâ, eosdem celasset; rescripsit
Vir Clarissimus, se quoque in hujusmo-
di calculos jam pridem incidisse. Unde
quæstio inter ipsos suborta, siue mavis in-
ter Leibnitium, & Newtoni siue Socios, si-
ve Discipulos, utri illorum inventionis
glo-

gloria debeatur.

Quemadmodum autem Newtonus quantitates, quæ continuò crescunt, aut decre-
scunt, vocavit fluentes, sic easdem Leib-
nitius variabiles appellavit; & sicuti New-
tonus momentanea illa incrementa, aut
decrementa vocavit fluxiones, sic iisdem
Leibnitius differentiarum nomen imposuit
Unde duos illos calculos, quibus methodus
indefinitè parvorum administratur, An-
gli cum suo Newtono methodum fluxionum
directam, & inversam dixere; Germani au-
tem, & Galli, qui Leibnitii vestigiis insti-
terunt, calculum differentialem, & inte-
gralem appellarunt.

Jam in nostris hisce Statices Elementis
adhibuimus quidem sepissimè, propter fre-
quentem usum curvarum, methodum in-
definitè parvorum, sed ut plurimum, ne-
glecto calculo, eam in auxilium accersui-
mus. Ubi autem necesse nobis fuit ad cal-
culum etiam confugere, placuit modum de-
signandi differentias Leibnitianum usurpa-
re, utpote commodiorem, & qui non tam
facilè Typographis errorum suppeditat ma-
teriam. Sed monitum quoque Lectorem vo-
lo, non solum considerasse Nos curvas li-
neas, velut polygona laterum infinitorum,
quorum unumquodque esset indefinitè par-
vum, verùm etiam, ut aggregata arcuum
in.

infinitorum, qui similiter indefinitè parvi
ad totidem circulos diversos referantur;
quam sanè considerationem, ut superiùs
innuimus, præbuit Geometris Theoria Hu-
geniana de lineis evolutis.



INDEX

LXI

SECTIONUM, ET CAPITUM.

STATICES ELEMENTA.

SECTIO I.

*De Generalioribus Statices
Principiis.*

CAP. I. *De communi gravium centro, ubi
etiam de figura telluris.* p. 4.

CAP. II. *De centro gravitatis cujusque cor-
poris, ubi etiam de linea dire-
ctionis.* p. 10.

CAP. III. *De universali corporum gravita-
tione, & de ejus legibus præ-
cipuis.* p. 25.

CAP. IV. *De quantitate materiae, & rursus
de proportionem, quam habet
cum pondere corporis.* p. 36.

CAP. V. *De velocitate, & quantitate mo-
tus, ubi etiam de motu equa-
bili, & variabili.* p. 46.

CAP. VI. *De vi motrice, ubi etiam de vi in-
sita, sive passiva materiae.* p. 62.

CAP.

pag. 00. **CAP. VII.** De directione virium, & motuum;
ubi de eorundem compositione,
& resolutione. p. 00.

SECTIO II.

De Artificiosa Gravium Latione.

- p. 97. **CAP. I.** De principio mechanices funda-
mentali, & de applicatione
ejus ad machinas simpliciores.
- p. 114. **CAP. II.** De communi centro gravitatis
quocumque corporum, & de
precipuis ejus affectionibus.
- p. 130. **CAP. III.** De methodo determinandi cen-
trum gravitatis in figuris re-
gularibus, ubi etiam de cen-
tro percussionis, & regula Gul-
dini.
- p. 145. **CAP. IV.** De equilibrio potentiarum, unum
idemque corpus trahentium, &
de mediis earundem directioni-
bus.
- p. 164. **CAP. V.** De equilibrio potentiarum fila,
funesve trahentium, & de me-
diis earum directionibus.
- p. 180. **CAP. VI.** De curvis, in quas flectuntur cor-
pora flexibilia per infinitas po-
tentias perpendiculariter iis
applicatas.

CAP. VII. De resistentiâ solidorum, tam verticaliter, quàm horizontaliter suspensorum.

p. 200.

CAP. VIII. De legibus motuum, quæ in mutua corporum collisione observantur.

p. 227.

SECTIO. III.

De Motu Gravium Naturali.

CAP. I. De descensu gravium per plana verticalia, sive recta ad horizontem.

p. 255.

CAP. II. De descensu gravium per plana ad horizontem inclinata.

p. 273.

CAP. III. De descensu gravium per plura plana contigua, ubi etiam de casu eorundem per plana curvilinea.

p. 285.

CAP. IV. De motu pendulorum per arcus circulares oscillantium.

p. 301.

CAP. V. De natura, & proprietatibus cycloidis, ubi etiam de epicycloide tam interna, quàm externa.

p. 316.

CAP. VI. De motu pendulorum isochrono in quacumque gravitatis hypothesis.

p. 342.

CAP.

p. 364.

CAP. VII. De motu pendulorum compositarum, sive de centro oscillationis.

.505.7

p. 305.

CAP. VIII. De oscillatione planorum, & solidorum, ubi etiam de identitate centri oscillationis cum centro percussionis.

.505.7

p. 405.

CAP. IX. De linea celerrimi descensus in quacumque gravitatis hypotbesi.

S E C T I O I V.

De Motu Gravium Violento.

.525.7

p. 421.

CAP. I. De motu projectorum in hypotbesi gravitatis constantis.

.525.7

p. 430.

CAP. II. De motu projectorum in quacumque gravitatis hypotbesi.

p. 459.

CAP. III. De inventione virium, quibus corpora moveri possint in curvis datis.

p. 462.

CAP. IV. De motu projectorum in hypotbesi gravitatis, reciproce proportionalis quadrato distantiae.

p. 509.

CAP. V. De motu aequabili corporum in orbibus circularibus.

p. 541.

CAP. VI. De motu projectorum in orbibus mobilibus, ubi etiam de motu Apsidum.

.541.7

STATICES ELEMENTA



Tatices nomine hîc intelligimus facultatem illam, quæ motum gravium considerat; tum artificiosum, qui machinarum ope perficitur; tum naturalem, qui à gravitate ipsâ dependet; tum denique violentum, qui à vi grave projiciente proficiscitur. Hinc hujusmodi facultas ex tribus velut partibus componetur, quarum una est de artificiosâ gravium latione, altera de gravium motu naturali, & tertia demum de motu gravium violento.

Ex tribus hisce partibus, quæ hanc constituent facultatem, prima tantùm Veteribus innotuit, eamque sub nomine Mechanices tradiderunt, quia geometricis innixa principiis, vires expendit machinarum, quibus gravia moventur, aut sustentantur. Sed quantum ad secundam, quæ motum gravium

vium naturalem considerat, necnon & tertiam, quæ agit de motu gravium violento; eæ omnino Veteres latuerunt, & utraque eximio Galilæo debetur.

Etsi enim Veteribus innotuerit, gravia inter descendendum naturalem suum motum accelerare, quum illud satis, superque quotidiana edoceat experientia; nihilominus juxta quam proportionem ista fiat acceleratio, nemo novit; & primus omnium Galilæus demonstravit, spatia à gravi è quiete cadente in temporibus æqualibus descripta eam inter se rationem retinere, quam habent numeri impares ab unitate se consequentes; atque adeo eadem spatia, à principio descensus computata, esse in duplicatâ temporum ratione.

Similiter, etsi nemo ex Veteribus non viderit, gravia, dum ab impellente manu projiciuntur, non rectam, sed curvam lineam describere; attamen nemo ante Galilæum ausus est naturam illius curvæ definire. Primus etenim Galilæus illam determinavit, & ex cognitâ gravium acceleratione collegit, curvam, quam projecta describunt, illam ipsam esse, quam parabolam Veteres appellarunt: unde postea omnia, quæ ad motum spectant projectorum, nullo negotio geometricè definivit.

Tametsi autem tres sint partes principa-
lio-

liores; ex quibus constat universa Statica, sive doctrina de motu gravium; nihilominus harum institutionum elementarium, quas in Tyronum gratiam conscribimus, quatuor futuræ erunt sectiones. Prima etenim Statices principia generaliora continebit; secunda aget de artificiosâ gravium latione; tertia descensum, sive motum naturalem gravium considerabit; & quarta demum gravium motum violentum expendet.

S E C T I O I.

*De Generalioribus Statices
Principiis.*

OMnis Physico-mathematica disciplinâ oritur ex conjunctione Geometriæ cum aliquâ sensibili affectione materiæ: ex quo fit, ut principia illius disciplinæ sint illa eadem, quæ sensibilem illam materiæ affectionem respiciunt. Quum itaque Statica oriatur, applicando veritates geometricas ad motum corporum gravium; non alia erunt principia Statices generaliora, quàm quæ vel ad gravitationem corporum, vel ad motum ipsum in genere referuntur.

*De communi gravium centro, ubi etiam de
figura telluris.*

Nihil adeo apud Mechanicos invaluit, quàm dari in tellure punctum aliquod internum, quod commune esset gravium centrum. Esse enim gravitatem unam ex viribus, quas Recentiores centripetas, si-ve centrales appellant; id ex eo liquet, quod corpora omnia, vi gravitatis acta, ad tellurem tendant, tamquam centrum: non secus, ac lapis fundâ circumactus ad manum velut centrum perpetuò fundâ retrahitur. Sed quoniam vis ista gravitatis exercetur, non modò supra superficiem telluris, verùm etiam infra, hoc est in vallibus, & locis subterraneis; dirigetur procul dubio non ad telluris superficiem, sed ad punctum aliquod telluris internum. Itaque punctum istud internum telluris, ad quod dirigitur vis gravitatis, illud est, quod commune gravium centrum Mechanici vocant.

Suppositâ autem telluris sphericâ figurâ, non aliud ostendunt esse commune gravium centrum, quàm centrum ipsum telluris. Experientia etenim docet, corpora gravia per vim gravitatis ad terram accedere, secundum
re-

rectas lineas, perpendiculares ejus superfici-
ciei. Sed sphaericae figurae ea est proprietas
praecipua, ut omnis recta linea ad ipsius su-
perficiem perpendicularis transeat produ-
cta per centrum ejusdem. Itaque si rectae li-
neae, per quas gravia vi gravitatis ad terram
accedunt, sint sphaericae ipsius superfici-
ciei perpendiculares, eae productae transibunt
omnes per centrum telluris, quod proinde
commune erit gravium centrum.

Sphaericam porro esse telluris figuram, ne-
mo ante hac in dubium revocavit, tum
propter eclipses lunares, in quibus umbra
telluris, sive etiam atmosphaerae rotunda, &
circularis conspicitur; tum propter obser-
vationes peractas ab iis, qui longa per ter-
ram, aut oceanum itinera instituerunt, quum
deprehenderint locorum tam latitudines,
quam longitudes augeri, vel minui pro
confecti quasi itineris ratione; tum denique
ob ipsam illam navigandi scientiam, qua in
ultimas ducimur terrarum oras, quum ejus
regulae, ex praesupposita telluris figura sphae-
rica velut ex unico principio deductae, suum
infallibiliter effectum fortiantur.

Verum plures ex insignioribus nostri
temporis Mathematicis ab hac de rotundita-
te telluris hypothese recesserunt, & diversis
principiis insistentes in duas opiniones toto
caelo diversas abiere. Primus enim Newto-

nus in principiis suæ Philosophiæ mathematicis, quum consideraverit singulas telluris partes, ob diurnam ejus circa proprium suum axim revolutionem, vim quandam centrifugam habere, per quam conantur continuò ab ipso axe recedere, & vim istam non eandem esse in singulis partibus, sed eò majorem, quò magis partes à polis recedentes ad æquatorem accedunt; collegit exinde tellurem elevatam esse versus æquatorem, & depressam versus polos.

Idem sensit quoque Christianus Hugenius in Diatribâ de Causâ Gravitatis. Nam rationem redditurus, cur pendulorum oscillationes celeriores sint in iis locis, quæ magis ab æquatore recedunt, id repetit ex eadem diurnâ telluris revolutione, quæ produciens in corporibus conatum quandam centrifugum, detrahit ex iis portionem proprii ponderis, conatui illi correspondentem, atque ita efficit, ut eò graviora sint corpora, cæteris paribus, quò magis ab æquatore recedunt: ex quo velut consequens infert partes æquatorias esse magis elevatas, quàm polares; quum actio gravitatis, quæ partes terrestres circa telluris centrum disponit, & aptat, major sit in polis, quàm in æquatore.

Interim etsi tam Newtonus, quàm Hugenius telluris figuram talem esse posuerint,

ut

ut partes æquatoriæ sint elevatae, polares
verò depressæ; nihilominus proportio, quam
habet diameter telluris secundum polos ad
diametrum telluris secundum æquatorem,
non eadem ab utroque statuitur. Hugenus
enim (& post eum Hermannus in suâ Pho-
ronomiâ) illam invenit, ut 577 ad 578;
Newtonus verò in secundâ laudati sui ope-
ris editione eandem ponit, ut 229 ad 230.
Neque mirum; quandoquidem ad hanc
proportionem indagandam, non eadem, sed
diversa principia adhibuerunt.

At ex alterâ parte doctissimus Burnetus
in suâ telluris theoriâ sacrâ ex eâdem diur-
nâ telluris revolutione figuram ejus talem
esse contendit, ut partes polares sint eleva-
tæ, æquatoriæ verò depressæ. Considerat si-
quidem, quod etsi partes aqueæ, sub æqua-
tore existentes, majores circulos describant,
atque adeo majorem habeant vim receden-
di à centro motus, attamen ob resistantiam
aeris, eas supernè prementis, attolli ne-
quaquam possint. Unde ob eandem illam
vim versus polos excurrentes, necesse est, ut
partes telluris polares reddant elevatas, æ-
quatorias verò depressas.

Hoc idem, argumento alio majoris roboris,
adstruit deinde Einsenschimidius, mathe-
maticus Argentorati. Nam perpendens ma-
gnitudinem gradus terrestris in extensione

telluris secundum polos, quæ oritur ex pluribus dimensionibus, quas sub diversis parallelis accuratissimè inierunt Erathostenes, Snellius, Ricciolius, & Piccartus, novit eam non eandem ubique esse, sed minui in accessu ad polos, augeri verò in accessu ad æquatorem. Unde collegit figuram telluris talem esse oportere, ut paralleli quidem circulis, meridiani verò ellipsibus, umbilicos habentibus in axe telluris, essent repræsentandi.

Argumentum istud Einsenschimidii, quod Burneti opinionem extra omne dubium ponit, confirmavit Cassinus, conferendo observationes suas cum iis, quas ante ipsum instituit Piccartus. Nam ex mensurâ distantiae, quæ est inter Ambianum, & Malvoisinam, invenit Piccartus magnitudinem gradus terrestris in extensione telluris secundum polos esse pedum parisiensium 342360; ex mensurâ verò distantiae, quæ est inter Observatorium Parisiense, & Villam Colioure in Roussillon, collegit Cassinus eandem gradus terrestris magnitudinem esse pedum parisiensium 342600. Unde, quia loca à Piccarto adhibita magis recedunt ab æquatore, quàm loca usurpata à Cassino, perspicuum est, magnitudinem gradus terrestris majorem esse in accessu ad æquatorem, quàm in accessu ad polos; & propterea
figu-

figuram telluris talem esse oportere, ut partes polares sint elevatae, æquatoriae verò depresso.

Jam quid in hac opinionum diversitate statuendum sit, nunc breviter discutiendum. Et primò quidem ratio, ex diurnâ telluris revolutione deprompta, qua utriusque opinionis assertores utuntur, litis hujus legitimus arbiter esse nequit; quandoquidem systema terræ motæ est merum commentum, ad ingenii potiùs, quàm veritatis, ostentationem inventum. Eo autem, velut merâ hypothesi, admissio, id quod contendit Burnetus, nequaquam sequitur; nam unâ cum globo terraqueo movetur etiam atmosphæra; adeoque quemadmodum partes hujus propter conatum centrifugum attolluntur, ita quoque attolli debent partes aqueæ, infra illas existentes.

Sed neque etiam exinde conficitur, figuram telluris talem esse debere, qualem adstruunt Newtonus, & Hugenius, nempe ut partes æquatoriae sint elevatae, polares verò depresso. Hoc enim tunc quidem sequitur, quotiescumque primigenia telluris figura ponitur circularis, & sphaerica. Itaque si hanc eis hypothesim negemus, & loco ejus hanc aliam substituamus, ut tellus ab initio fuerit sphaeroides oblongata versus polos; major ille conatus centrifugus in partibus, quæ

quæ magis accedunt ad æquatorem, tantum efficere potuit, ut tellus non adeò esset versus polos oblongata.

Quum igitur ratio, ex diurnâ telluris revolutione deducta, quæstionẽ istã nec possit, nec debeat definire, expendamus vim argumenti, quod eruitur ex deprehensâ inæqualitate graduum terrestrium in extensione telluris secundum polos, nempe quod magnitudo gradus terrestris minuatur in accessu ad polos, augeatur in accessu ad æquatorem. Neque enim satis est ad adstruendam tellurem oblongatam versus polos, quod inæqualitas ista satis apte explicetur, ponendo meridianos omnes esse totidem ellipses, umbilicos habentes in axe telluris. Nam quum præter ellipsim innumerae aliæ dentur curvæ lineæ, quæ in orbem redeunt, ostendendum est generaliter nullam dari posse ovalem, quæ illam explicans inæqualitatem, axim minorem habeat, per polos transeuntem, axim verò majorem per planum æquatoris.

FIG. I.

Hujus rei demonstratio pendet ex doctrinâ Recentiorum de curvis evolutis; unde, ut ea meliùs intelligatur, præmittenda sunt priùs nonnulla de genesi curvarum, quæ per aliarum evolutionem describuntur: scilicet, quod si ABC sit curva quævis linea, filo undique æqualiter tenso involuta, ac

com-

complicata, & fili extremitas A intelligatur, ita quidem moveri, ut ab ipso filo sensim curva evolvatur, atque interim evolutæ fili portiones BM, CN mancant semper æqualiter tensæ; quod inquam extremitas illa fili describat hoc motu curvam aliam AMN, respectu cujus dicitur evoluta, curva prior ABC.

Quemadmodum autem ex ipsâ curvæ genesi abundè liquet, portiones fili BM, CN, quæ radii evolutæ dicuntur, æquales esse correspondentibus evolutæ portionibus AB, AC; ita quoque ex eadem curvæ genesi haud difficulter colligi potest, eosdem radios BM, CN evolutam quidem contingere in punctis B, & C, ipsam verò curvam ex evolutione descriptam perpendiculariter secare in punctis M, & N.

Etenim, si portionem curvæ BC indefinitè parvam supponamus, atque ita eam consideremus velut portionem rectæ lineæ, quæ contingit evolutam in puncto B; quia portio fili BM æqualiter tensa supponitur, ea jacebit in directum cum illâ fili portione, qua involvitur curvæ portio BC; & consequenter, quia CBM est unica recta linea, ea erit, quæ contingit evolutam in puncto B.

Et quoniam portio ortæ curvæ MN considerari potest, veluti arcus descriptus centro C, & intervallo CM, sive CN, quum
in

in evolutione portionis curvæ BC radius BM quodammodo circa punctum C circulariter moveatur, perspicuum est eundem radium BM non modò contingere evolutam in puncto B , verùm etiam curvam ex evolutione descriptam ad rectos angulos secare in puncto M ; quum notum sit ex elementis omnes circuli radios circumferentiæ perpendiculariter insistere.

Atq; hinc liquet ulteriùs, quod sicuti curva ex evolutione descripta AMN cōsiderari potest, velut aggregatum infinitorum arcuum, qui omnes sint indefinitè parvi, & ad totidem circulos diversos referantur, ita curva ipsa evoluta ABC respici possit, velut sedes, sive locus, in quo eorum omnium arcuum centra reperiantur. Unde suâ sponte consequitur, evolutam cujusque circuli circumferentiæ esse ipsum circuli centrum, unamquamque curvam nonnisi unicam evolutam habere, atque hujus puncta singula inveniri, quærendo punctum concursus duarum rectarum, quæ datam curvam in duobus punctis indefinitè proximis ad rectos angulos secant.

Sed notetur hoc loco velim, curvam ex evolutione descriptam posse quandoque diversum ab evoluta ipsâ principium habere. Si enim filum, quod involvit curvam ABC , usque in D in directum protendatur, ita ut
 por-

portio ejus AD curvam contingat in A ; li-
quet , evolutione fili punctum D describere
curvam DEF , cujus principium est diver-
sum ab eo , quod refertur ad ipsam evolu-
tam ABC . Verùm hoc casu radius evolutæ
BE erit æqualis AB unà cum AD, & simili-
ter radius CF erit æqualis AC unà cum ea-
dem AD.

His prænotatis , haud difficile modò erit
ostendere id, quod erat præcipuum. Sit enim
ABCD ovalis, quæ oritur, secando tellurem
plano per axim, sitque AC axis secundum
polos, & BD axis secundum æquatores. Ostē-
dendum est igitur, quod si in ovali istâ ma-
gnitudo gradus terrestris minuatur in acces-
ad polos, augeatur in accessu ad æquatores,
necessariò axis secundum polos AC debeat
esse major axe secundum æquatores BD .

FIG. 2.

Quoniam enim uterque axis ovalem
secat ad rectos angulos, fit hinc, ut evo-
lutæ portionis AB radius correspondens
puncto A sit axis AC, & radius correspon-
dens puncto B sit axis BD : proindeque ipsa
illius portionis evoluta existet inter rectas
AC, BD . Et quoniam eadem rectæ AC, BD
contingere debent evolutam, existet evoluta
istâ, vel intra angulum AED, vel etiam in-
tra angulum BEC ; adeoque erit, vel curva
PQR , vel curva STV.

Et quidem existente evolutâ intra angu-
lum

lum AED, id, quod ostendendum est, abunde liquet. Est enim curva PQR minor duabus rectis PE, ER, quæ illam comprehendunt; adeoque additâ communi AP, erit AP unâ cum PQR minor duabus AE, ER. Sed AP unâ cum PQR est æqualis radio evolutæ BR. Itaque duæ AE, ER majores erunt, quàm BR; & propterea ablatâ communi ER, erit AE major, quàm BE, five etiam AC major, quàm BD.

Quod si verò evoluta existat intra angulum BEC, tunc vicissim erit BD major, quàm AC. Nam curva STV est minor duabus rectis SE, EV, quæ illam comprehendunt; proindeque additâ communi BS, erit BS unâ cum STV minor duabus BE, EV. Sed BS unâ cum STV est æqualis radio evolutæ AV. Itaque duæ BE, EV majores erunt, quàm AV; adeoque ablatâ communi EV, erit BE major, quàm AE; & consequenter BD major, quàm AC.

Eò itaq; res redit, ut ostendamus evolutam portionis AB existere intra angulum AED, quod equidem sponte suâ consequitur, si ostendi possit radios evolutæ illius augeri ab A versus B; nam si utique existeret intra angulum BEC, vicissim radii ipsius minuerentur ab A versus B. Augeri autem radios evolutæ, quæ refertur ad portionem AB, ab A versus B, ex deprehensâ graduum terrestrium

strium inæqualitate in hunc , qui sequitur , modum ostendemus .

Capiantur in ipsâ AB duo arcus indefinitè parvi AM , MN , sed ita tamen , ut iis eadem correspondeat latitudinum differentia , & non consideratâ evolutæ positione , sint MO , NQ radii ejus correspondentes punctis M , & N . Quia igitur , in omni figuræ telluris hypothese , differentia latitudinum duorum quorumvis locorum est angulus , quem constituunt rectæ lineæ , ex iis locis perpendiculariter ad telluris superficiem erectæ ; erit angulus AOM differentia latitudinum in locis A , & M ; & angulus MQN differentia latitudinum in locis M , & N ; adeoque , quum ex hypothese arcubus AM , MN eadem correspondeat latitudinum differentia , erit angulus AOM æqualis angulo MQN .

Hinc similes sunt sectores AMO , MNQ ; eritque proinde ut AM ad MN , ita MO ad NQ . Et quoniam magnitudo gradus terrestris augetur in accessu ad æquatorem ; ex arcubus AM , MN , quibus eadem correspondet differentia latitudinum , necesse est , ut MN major sit , quàm AM : quare erit quoque NQ major , quàm MO , hoc est radius evolutæ , correspondens puncto N , major radio , qui correspondet puncto M . Quumq , eadem sit demonstratio de aliis evolutæ radiis ,

con-

consequens est, evolutam ipsam talem esse, ut radii ejus augeantur ex A versus B: proindeque existet illa intra angulum AED, eritque adeò axis secundum polos AC major axi secundum æquatorem BD.

Rectè igitur infertur, tellurem esse oblongatam versus polos ex eo, quod magnitudo gradus terrestris augeatur in accessu ad æquatorem. Nam quæcumque ovalis oriatur, secando tellurem plano per axim, semper ex ostensis axis ejus secundum polos major esse debet axi ejusdem secundum æquatorem. Quocirca quum inæqualitas illa graduum terrestrium ob exactissimas Geographorum observationes nequeat in dubium revocari; concludendum est, figuram telluris reverà talem esse, ut partes polares sint elevatæ, æquatoriæ verò depressæ.

Ex eo autem, quod tellus non sit sphærica, quemadmodum ante hac communiter credebatur, sed sphæroides oblongata versus polos; efficitur, ut commune gravium centrum neque etiam sit merum punctum, quemadmodum huc usque existimatum à Mechanicis, sed superficies illa, quæ est evoluta superficiei terrestris, quum ad istam tendant gravium directiones. Qua ratione si ABCD sit ovalis, quæ oritur secando tellurem plano per axim, sitque PRVS ovalis hujus evoluta; quemadmodum per
re-

revolutionem ovalis circa axim AC describitur superficies terrestris, ita per revolutionem evolutæ circa eundem axim generabitur superficies, quæ pro communi gravium centro debet haberi.

Atque hinc modò ratio intelligi potest, cur pendulorum oscillationes evadant celeriores in iis locis, quæ magis recedunt ab æquatore: nimirum, quia tametsi partes æquatoriae sint depresso, polares verò elevatae, attamen distantia corporis gravis à centro, in quod gravitat, fit major in accessu ad æquatorem; quum radii evolutæ, describentis ovalem, quæ oritur secundo tellurem plano per axem, à polo versus æquatorem cōtinuò crescant. Cæterùm etsi vera telluris figura non sit sphaerica, sed sphæroides versus polos oblongata; quia tamen differentia inter diametrum secundum æquatorem, & diametrum secundum polos, tanta non est, ut neglecta possit nos in examinandis motibus corporum gravium in sensibilem aliquem errorem inducere; proinde supponemus in posterum figuram telluris ad sphaericam accedere, adeoque commune gravium centrum illud idem esse, quod hucusque à Mechanicis usurpatum.

*De centro gravitatis cujusque corporis, ubi
etiam de linea directionis.*

Quemadmodum in tellure considerant
Mechanici commune gravium cen-
trum, ita in unoquoque corpore centrum
propriæ suæ gravitatis mente concipiunt.
Hoc autem vocant punctum illud corporis
internum, in quo vis gravitatis subinde
colligitur, & coacervatur, ut extra ipsum
nihil gravitatis in aliis corporis particulis
inesse videatur, & circa quod proinde par-
tes ejusdem corporis subinde librantur, ut
si exinde corpus ipsum suspendatur, eun-
dem semper suarum partium situm retine-
bit, nec in ipsâ suspensione circumverte-
tur.

Hinc tale punctum in illo semper plano
reperietur, quod corpus ipsum dividit in
duas partes æquiponderantes; nam quum
partes illæ sint ejusdem ponderis, necesse est,
ut eædem subinde librentur circa planum
illud, ut neutra alteram attollere possit. Ne-
que verò requiritur, ut partes, in quas di-
viditur corpus à plano secante, sint semper
ejusdem magnitudinis; nam pondera cor-
porum, ut inferiùs ostendemus, in datâ di-
stan-

stantiâ à communi centro gravitatis, non quidem magnitudinibus, sed quantitativus materiæ, in iis existentibus, proportionem correspondent.

Quod si verò materia alicujus corporis esset ejusdem ubique densitatis, tunc equidem partes duæ, in quas dispescitur corpus à plano, per centrum gravitatis transeunte, non modò erunt ejusdem ponderis, verùm etiam ejusdem magnitudinis. Nam quantitas materiæ, quæ existit in unoquoque corpore, ut suo quoque loco videbimus, repetenda est ex magnitudine, & densitate conjunctim; adeòque quum duo corpora eandem habent densitatem, tunc eorum materiæ quantitates erunt in solâ magnitudinum ratione.

Ex eo autem, quod centrum gravitatis cujusque corporis reperiatur in plano, quod corpus ipsum dividit in duas partes æquiponderantes, haud difficile erit ostendere cum Pappo Alexandrino, quod centrum istud gravitatis existat, non solùm in corporibus, quæ certum servant partium ordinem, sed etiam in iis, quæ temerè, & casu formata sunt, quodque idem centrum non nisi merum punctum esse debeat.

Si enim corpus quodcumque unâ sui dimensione super plano verticali collocetur, habebit aliquando positionem talem, ut

maneat immotum, & non decidat: proindeque si planum producat, secabitur corpus in partes duas æquiponderantes, atque adeò planum secans transibit per centrum gravitatis. Similiter, si idem corpus alterâ sui dimensione super eodem plano collocetur, acquireret aliquando talem positionem, ut dimissum maneat, & non decidat: proindeque si rursus planum producat, secabit denuo corpus in partes duas æquiponderantes, atque adeò iterum transibit per centrum gravitatis. Denique, si super eodem plano tertiâ sui dimensione corpus idem applicetur, & in eâ positione, in qua dimissum manet libratum, & non decedit, producat tertio planum, secabitur adhuc corpus in partes duas æquiponderantes, & propterea planum illud transibit tertio per centrum gravitatis. Unde quum tres istæ corporis sectiones nonnisi unicum punctum commune habeant, erit punctum illud commune centrum gravitatis corporis propositi.

Præterea in descensu libero gravium considerant Mechanici lineam directionis, eamque vocant lineam illam, quam dum grave corpus descendit, propriæ suæ gravitatis centrum describit. Unumquodque etenim grave, quum liberè descendit, non quidem obliquè, sed rectâ ad horizontem, sive telluris superficiem accedere; id equidem abundè

dè docet experiētia. Sed hanc interim rectam lineam horizonti perpendicularem, per quam grave corpus descendit, non ab alio puncto describi, quàm à centro suæ gravitatis; id sanè non solùm experientia, sed ipsa naturalis ratio suadet.

NB

Omnis etenim gravitas cujusque corporis subinde in ipso gravitatis centro colligitur, & coacervatur, ut extra ipsum nihil gravitatis in aliis corporis particulis inesse videatur. Quocirca, quum grave aliquod corpus vi gravitatis deorsum fertur, cæteræ corporis partes, velut omni pondere destitutæ, motum centri gravitatis consequentur: proindeque linea ad horizontem perpendicularis, per quam decidit grave corpus, à centro propriæ suæ gravitatis describetur.

Istæ gravium directiones convergunt omnes ad commune gravium centrum; sed nihil interim vetat, quominus eæ velut parallelæ considerentur. Notum est enim apud Geometras, rectas lineas, ad punctum indefinite distans convergentes, posse velut parallelas considerari. Jam verò commune gravium centrum, ad quod convergunt gravium directiones, indefinite distat à nobis. Itaque gravium directiones, tametsi convergentes ad commune gravium centrum, possunt velut parallelæ absque sensibili errore considerari.

Quum grave corpus super plano aliquo infistit, & linea directionis transit per basim ipsius, illud semper manebit immotum. Conatur quippe grave corpus ad tellurem accedere secundum lineam directionis. Itaque quotiescumque nequit per hanc lineam vim suam gravitatis exercere, necesse est, ut maneat immotum, & non decidat. Sed infistente corpore subinde super plano aliquo, ut linea directionis transeat per basim ejus, tunc nequit per lineam illam vis gravitatis exerceri, quum impedimento sit planum subjectum. Quare necesse est, ut hoc casu maneat immotum, & non decidat.

Vicissim verò, quum corpus ita quidem infistit super plano aliquo, ut linea directionis cadat extra basim, tunc nequaquam manebit immotum, sed decidet necessarid; quia scilicet potest optimè vis gravitatis secundum lineam directionis exerceri, quum ei nihil sit impedimento. Unde corpus sphaericum super plano aliquo inclinato positum, si sit ejusdem ubique densitatis, non potest non descendere; nam ratione rotunditatis contingit subjectum planum in unico tantum puncto, per quod linea directionis nequaquam transit, quum linea illud conjungens cum centro gravitatis, velut perpendicularis ad planum inclinatum, obliquè secet planum horizontale.

Ne-

Neceſſe eſt autem, ut corpus ſphæricum ſit ejusdem ubique denſitatis, quò centrum ſuæ gravitatis in ipſo ſphærae centro reperiatur. Nam ſi nexus partium non ſit ubique idem, neque adeò eadem ubique denſitas, tunc centrum gravitatis nequaquam in centro ſphærae reperietur: proindeque linea conjungens punctum contactus cum centro gravitatis, quia obliquè ſecat planum inclinatum, poterit quandoque ad rectos angulos horizontali plano occurrere; & confequenter vices lineæ directionis ſuſtinere.

Sed in ipſo plano horizontali tunc etiam corpus ſphæricum ejusdem ubique denſitatis manet immotum, & non decedit, quum collocatur in eo loco, in quo tellurem contingit, & reſpectu cujus plani horizontalis nomen meretur; quandoquidem iſto dumtaxat in loco linea conjungens punctum contactus cum centro gravitatis, velut perpendicularis ad ſuperficiem telluris, vices ſuſtinet lineæ directionis. Unde quocumque alio in loco corpus ſphæricum collocetur, quia linea directionis tranſire nequit per punctum contactus; cadet iſta ſemper extra baſim, adeòque ipſum corpus ſphæricum nequaquam manebit immotum.

Jam quum corpus ſphæricum ſuper plano horizontali alio in loco collocatur, quàm in eo, in quo telluris ſuperficiem

planum contingit; cadet linea directionis inter locum istum, & punctum contactus corporis sphaerici: unde corpus versus eundem hunc locum dirigit motum suum, veluti declivem respectu ejus, in quo reperitur. Sed quum ad ipsum pervenerit locum, nolim credatis in quiete mansurum; nam juxta leges penduli, inferius à nobis ostendendas, necesse est, ut in alterâ plani parte tantundem spatii percurrat, quantum in priori peragravit; adeoque itu, redituque, non secus ac pendulum, perpetuò movebitur, nec unquam poterit ad quietem pervenire.

Ex iisdem principiis colligi quoque potest, corpora gravia eò magis viribus externis resistere, & erecta manere, quò majores fuerint bases, quibus innituntur. Nam ut ea concussa decidere possint, necesse est, ut linea directionis cadat extra basim; sed quò major est basis, intra quam vagari potest linea directionis, eò major requiritur vis ad hoc, ut ipsa directionis linea basim transfiliat. Itaque corpora gravia externis viribus eò magis resistent, & immota manebunt, quò majores sunt bases, quibus inhaerent.

Atque hinc ratio elucescit, cur homines utroque innixi pede stent facillimè, quum tamen difficulter maneat immoti, ubi

uni-

unico pede, multoque difficilius, quum vel calcaneo, vel apice pedis dumtaxat innituntur. Humanum siquidem corpus propter naturales ejus functiones concutitur indefinenter, proindeque linea directionis continuò etiam variatur: ex quo fit, ut eo facilius stare possit erectum, quò major est basis, intra quam vagari potest linea directionis; quæ quidem major est, quum pede toto, quàm quum calcaneo, aut apice pedis, multoque major, quum utroque pede innititur.

Patet etiam, cur corpus aliquod exile, vè ut est acus, super cuspide suâ erectum manere non possit: nimirum, quia propter continuum aeris motum linea directionis facile extra basim vagatur. Sed liquet quoque, cur columnis erectis eò major accedat resistentia, quo majori pondere premuntur; scilicet, quia ob majus illud pondus non ita facile concuti possunt, adeoque major requiritur vis, ut linea directionis basim egrediatur.

C A P. III.

*De universali corporum gravitatione, & de
ejus legibus præcipuis.*

Corpora omnia terrestria gravitare in terram, phænomenon est, quod abundè

dè docet experientia ; quum nullum adeo exiguum sit, quod non conetur ad tellurem accedere. Sed eandem gravitatem dari etiam in corporibus cœlestibus ea quidem ratione, ut planetæ primarii gravitent in solem, & planetæ secundarii in suos primarios, id primus omnium novit Newtonus ex totius universi systemate, quod ita nobis in admirando suo opere principiorum Philosophiæ sub oculos posuit, ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex Alphonsus vel simplicitatem, vel harmoniæ gratiam in eo desideraret.

NB
Inde autem collegit gravitationis hujus universalis tres esse leges præcipuas. Prima est, quod pondera corporum in æqualibus ab eo in quod gravitant distantis, sint ut quantitates materiæ, quæ in iis corporibus existunt. Secunda, quod pondus unius, ejusdemque corporis in recessu ab eo, in quod gravitat, decreascit in duplicatâ ratione distantiae. Et tertia, quod pondera corporum in diversis ab eo in quod gravitant, distantis sint conjunctim, ut quantitates materiæ directè, & quadrata distantiarum inversè.

Et sanè omnes istæ leges gravitationis non aliundè repeti poterant, quàm ex totius mundani systematis cognitione ; nam ex iis, quæ apud terram nostram experimur,
non

non aliud colligi posse videtur, nisi quod pondera corporum propè telluris superficiem sint, ut quantitates materiæ, in iis corporibus existentes; quum non aliud nobis constet experiëntiâ, quàm quod æquales sint accelerationes corporum omnium, per vim gravitatis è quiete cadentium, utpote quæ sublatâ aeris resistentiâ æqualibus temporibus æqualia spatia describunt.

Ex eo enim, quod æquales sint corporum omnium per vim gravitatis è quiete cadentium accelerationes, manifestè sequitur, corporum pondera prope telluris superficiem esse ut materiæ quantitates, quæ in corporibus existunt. Nam quotiescumque vis gravitatis in corpus aliquod operatur, illudque urget, & accelerat; quod ei opponitur, & reluctatur, est quantitas materiæ. Quocirca, quum duo corpora per vim gravitatis æqualiter accelerantur, in eo servatâ proportionem major est actio gravitatis, in quo plus materiæ continetur: proindeque pondera, sive vires gravitantes eorum corporum, erunt inter se, ut eorundem materiæ quantitates.

Sed non abs re erit hîc paucis innuere, qua ratione ex phænomenis cœlestibus alias duas leges gravitationis deduxerit Newtonus. Nimirum naturæ lex est ab omnibus recepta Philosophis, corpus omne per-

se-

severare in statu suo quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare. Inde itaque sequitur, corpora, quæ moventur in lineis curvis, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente in itinere curvilineo retineri; proindeque planetis in orbibus revolventibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus repetitas actiones indefinenter à tangentibus flectantur.

Jam autem circa motus planetarum, post Keplerum sanioris Astronomiæ Patrem, illud in confesso est apud Astronomos omnes, nempe planetas primarios circa solem, & planetas secundarios circa suos primarios subinde revolvi, ut radiis ad illos actis areas percurrant temporibus proportionales. Unde quia mathematicis rationibus certissimè demonstratur, corpora illa, quæ ita moventur in gyrum, ut areas circa punctum aliquod describant temporibus proportionales, viribus urgeri ad punctum illud, velut centrum, tendentibus; consequens est, ut vires planetarum primariorum ad solem, & vires secundariorum ad suos primarios tamquam centra dirigantur.

Præterea circa motus planetarum illud etiam convenit apud Astronomos universos: nimirum planetas omnes motibus suis non
qui-

quidem describere tot circulos, quemadmodum superstitiosa credebant antiquitas, sed ellipses totidem, umbilicum inferiorem in centro virium habentes. Quocirca quia mathematicis rationibus evincitur, vim, qua corpus revolvitur in ellipsi, esse ut quadratum distantiae reciprocè, quum ad ellipseos umbilicum tendit; concludendum est, vim qua quisque planeta revolvitur, & in orbe suo detinetur, in recessu à centro virium decrescere in duplicatâ ratione distantiae.

Ulteriùs, quia revolutiones planetarum primariorum circa solem, circumjovialium circa jovem, & circumsaturniorum circa saturnum sunt phœnomena ejusdem generis cum revolutione lunæ circa terram; naturalis ratio suadet, lunam eâdem omnino vi revolvi circa terram, qua revolvuntur planetæ primarii circa solem, circumjoviales circa jovem, & circumsaturnii circa saturnum, quum natura causis superfluis non luxuriet. Itaque si ostendi potest, vim, qua luna revolvitur circa terram, non differre à vi illâ, quam in corporibus terrestribus gravitatem appellamus; consequens erit, gravitatem dari in corporibus omnibus, & quemadmodum corpora terrestria unâ cum ipsâ lunâ gravitant in terram, ita planetas primarios gravitare in solem, circumjoviales in jovem, & circumsaturnios in saturnum.

Non

Non differre autem vim, qua luna revolvitur circa terram, à vi ipsâ gravitatis, ostendi potest ex eo, quod utraque vi prope superficiem telluris idem omnino spatium dato tempore describatur. Assumptâ namque lunæ à terrâ distantîâ semidiametrorum terrestrium sexaginta, quia lunaris periodus respectu fixarum perficitur spatio dierum viginti septem, horarum quinque, & quadraginta trium minutorum, terræque ambitus est pedum parisiensium 123249600, uti à Piccarto mensuratore Gallo est definitum; invenietur inito calculo secundum hæc elementa, lunam spatio unius minuti primi describere vi suâ pedes parisienses quindecim cum unâ parte duodecimâ; & propterea quia vis, qua luna detinetur in orbe suo, decrescit in duplicatâ ratione distantîæ, eadem luna prope terram describet vi suâ tempore unius minuti primi pedes parisienses 54300.

Porro Hugenus captis pendulorum experimentis, & calculo inde inito demonstravit corpora terrestria vi gravitatis cadendo describere eosdem pedes parisienses quindecim cum unâ parte duodecimâ tempore unius minuti secundi. Unde quia spatia vi gravitatis prope telluris superficiem descripta, ut inferius ostendemus, & ipsa confirmat experientia, sunt ut quadrata tem-

temporum, quibus spatia illa describuntur; eadem corpora terrestria tempore unius minuti primi describent vi gravitatis prope terram pedes parisienses 54300; & propterea, quum æqualia sint spatia, quæ à vi lunæ, & à vi gravitatis prope tellurem nostram dato tempore describuntur, concludendum est, vim lunæ prope terram adæquare vim gravitatis.

Non itaque differt vis, qua Luna revolvitur circa terram, à vi gravitatis: quare eadem erit utriusque natura, nec aliâ vi tam luna circa terram, quàm planetæ alii revolventur, quàm ipsâ illâ, quæ efficit, ut corpora terrestria decidant in terram. Unde facile modò erit alias duas gravitationis leges ex phœnomenis comprobare. Nam si vis gravitatis detur in corporibus omnibus, & quemadmodum corpora terrestria gravitant in terram, ita planetæ primarii gravitent in solem, & secundarii in suos primarios; proculdubio quicquid circa vim istam gravitatis de uno corporum genere innotescit, illud idem de corporibus universis licebit affirmare. Quocirca, quia in planetis vis ista gravitatis minuitur in recessu à corpore, in quod gravitant, in duplicatâ ratione distantiae; concludendum est, eandem vim gravitatis in corporibus terrestribus decrescere etiam in duplicatâ distantiae ratione, quum
à tel-

à tellure recedunt.

Atque hac gravitationis lege comprobata, facile erit & illam paulò generaliore ostendere, quod pondera corporum, quæ in diversis ab eo, in quod gravitant, distantis consistunt, sint conjunctim, ut quantitates materiæ in corporibus iis existentes directè, & quadrata distantiarum inversè. Nam si corpora illa essent in æqualibus ab eo, in quod gravitant, distantis, pondera ipsorum ex superius ostensis suis quantitatibus materiæ directè corresponderent. Sed pondus cujusque corporis in recessu ab eo, in quod gravitat, minuitur in duplicatâ ratione distantiae. Itaque, quum corpora in diversis ab eo, in quod gravitant, distantis consistunt, pondera ipsorum erunt conjunctim ut quantitates materiæ directè, & quadrata distantiarum inversè.

Quantum ad causam gravitatis, duæ sunt præcipuæ Philosophantium opiniones, toto cœlo diversæ. Prima est illorum, qui putant gravitatem esse universalem, longèque præcipuam in universitate rerum continendâ materiæ affectionem, quæ sit verum motus principium, veraque causa suæ conservationis. Atque hanc opinionem, in qua fuerunt omnes fere Veteres Philosophantes, apud Anglos rursus ad auras revocavit Vir Clarissimus Isaac Newtonus.

Nam

Nam inquit , quum materia ex se sit principium purè passivum , habeatque tantum vim inertiae , per quam corpora persistunt in illo statu , in quo semel sunt collocata;proculdubio ab illo solo principio nullus unquam in rerum naturâ motus potuisset oriri . Itaque alio aliquo principio omnino opus erat ad movenda corpora , & jam, quum moventur , aliud itidem requiritur ad motum eorundem conservandum, cujusmodi præter gravitatem est nullum.

Altera opinio est eorum, qui contendunt gravitatem esse merum motus effectum . Etsi enim ultro fateantur , materiam esse inertem , omnisque actionis expertem , nec proinde motum à materiâ oriri potuisse ; attamen vim motricem , quæ in hac rerum universitate continendâ requiritur, non aliâ agnoscunt , quàm ipsam Dei voluntatem. Supponunt enim , quod sicuti Deus ab initio certam creavit materiæ quantitatem , quam immutabili suâ voluntate conservat eandem , & immutatam ; ita certam creatæ materiæ motus quantitatem indiderit , quæ per eandem ipsius Dei immutabilem voluntatem eadem semper , & invariata conservetur . Ex quo factum , ut quemadmodum prioris sententiæ assertores gravitatem à Deo , motum autem à gravitate repetunt; ita vicissim alterius hujus sententiæ patroni

motum quidem à Deo , gravitatem vero à motu deducant.

Qui gravitatem considerant velut principium generale , unde motus omnes subnascuntur, & quo mediante iidem motus conservantur , ii quidem recensitas leges gravitationis mechanicè explicare non tenentur ; quia sicuti gravitatem à Deo repetunt, ita & legum gravitationis non alium, quàm Deum auctorem agnoscunt. Sed qui vicissim non aliud principium motus admittunt , quàm Deum ipsum , gravitatemque ut merum motus effectum respiciunt , iis quemadmodum onus incumbit ostendere , qua ratione ex motu impresso materiæ potuerit gravitas oriri , ita mechanicè debent explicare , quo pacto ex eodem principio tres illæ gravitationis leges consequantur.

Non me latet eos , qui gravitatem à motu repetunt , de mechanicâ gravitatis explicandæ ratione inter se non satis convenire ; verùm id omnibus commune est , ut gravitas oriatur ex pressione, quam materia quædam subtilissima, tellurem undique cingens, exerit in grave corpus , quod inter illius materiæ particulas nequit in æquilibrio consistere . Unde facilè intelligimus , qua ratione pondus cujusque corporis in datâ à tellure distantia quantitati suæ materiæ correspondeat . Nam pressio , quam subit

cor-

corpus grave, tanta est, quantam exerunt particulæ materiæ subtilissimæ, quæ ad servandum æquilibrium in locum illius corporis subingredi conantur; quarum quidem particularum numerus correspondet multitudini partium, grave illud corpus componentium, hoc est quantitati materiæ in corpore illo existenti; quum interstitiorum ejusdem corporis nulla ratio sit habenda, quippe quæ jam materiâ illâ subtilissimâ sunt repleta.

Intelligimus etiam, qua ratione fiat, ut vis gravitatis in recessu à tellure decrescat in duplicatâ ratione distantiae, atque aded ut pondera corporum in diversis à tellure distantis sint conjunctim, ut quantitates materiæ directè, & quadrata distantiarum inversè. Nam, quum oriatur vis gravitatis ex pressione, quam materia quædam subtilissima exerit in grave corpus, erit vis gravitatis in omni distantia proportionalis huic pressioni. Jam verò, si concipiamus subtilissimam illam materiam divisam in innumeras superficies, concentricas telluris superficiei; erit hæc pressio major in superficie minori, & minor in superficie majori; adedque reciprocè proportionalis superficiei, in qua ea exercetur, hoc est reciprocè proportionalis quadrato distantiae. Itaque & ipsa vis gravitatis in omni loco reciprocè

proportionalis erit quadrato distantiae, adeoque in recessu à tellure decrescet in duplicata distantiae ratione.

C A P. IV.

De quantitate materiae, & rursus de proportionem, quam habet cum pondere corporis.

Quoniam motus corporum gravium prope telluris superficiem à nobis considerentur, illud semper assumemus, ut pondus cujusque corporis quantitati suae materiae proportionem respondeat, atque adeo ut ipsa vis gravitatis eadem semper, & constanti ratione in corpora operetur. Sed priusquam ad alia progrediamur, non abs re erit de quantitate materiae tantisper differere, simulque aliam methodo ostendere elegantem illam corporum proprietatem, quod pondera duorum quorumvis corporum prope telluris superficiem eandem habeant rationem inter se, quae inter eorundem materiae quantitates deprehenditur.

Itaque quantitas materiae, quae existit in unoquoque corpore, est complexus, sive aggregatum partium omnium, quae corpus illud componunt: unde etiam nomine massae à nonnullis insignitur. Harum partium numerus omnino nos latet; tum quia pars nulla

la determinari potest cogitatione tam aded exigua, quæ in alias adhuc minores re ipsâ non sit divisibilis, nec proinde licet unquam ad ultimas devenire; tum etiam quia etsi corpora omnia ex minimis quibusdam particulis, naturâ suâ indivisibilibus, componeretur, attamen partes istæ propter figurarum diversitatem non essent ejusdem magnitudinis, neque ideo ex unius cognitione posset numerus omnium indagari. Ex quo fit, ut in comparandis quantitatibus materiæ, quæ in duobus quibuscvis corporibus existunt, alia planè ratio debeat iniri, quàm numeros partium corpora illa componentium inter se mutuò conferre.

Et quidem si corpora omnia subinde essent composita, ut idem in omnibus sit partium nexus, eademque corporum omnium densitas; nulla meliori ratione duorum quorumvis corporum materiæ quantitates possent inter se mutuò comparari, quàm conferendo simul magnitudines, sive moles eorundem corporum. Verùm quia corpora omnia non sunt æqualiter densa, nec eorum partes componentes eodem modo connectuntur; fit hinc, ut in duorum quorumvis corporum quantitatibus materiæ comparandis, non modò ad magnitudines eorum corporum debeat attendi, verùm etiam ad densitates, sive nexus partium componen-

tium, nullâ habitâ ratione materiæ subtilissimæ, si quæ fuerit, interstitia earum partium liberè pervadentis: adeò ut ratio quantitatum materiæ censenda sit composita ex ratione magnitudinum, & ratione densitatum.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam quemadmodum clarè liquet, in corporibus homogeneis, sive æqualiter densis, illud plus materiæ continere, cujus major est moles, sive magnitudo, & propterea quantitates materiæ eandem inter se rationem habere, quàm magnitudines, sive moles corporum; ita quoque liquidò constat, in corporibus ejusdem magnitudinis illud plus habere materiæ, cujus partes arctiùs conjunguntur, atque adeò materiæ quantitates in iis esse in ratione densitatum. Quocirca in duobus quibuscvis corporibus, quæ neque sint ejusdem magnitudinis, neque ejusdem densitatis, necesse est, ut ratio quantitatum materiæ componatur ex ratione magnitudinum, & ratione densitatum: ita ut in iis conferendis attendi debeat, tum ad magnitudines, cùm ad densitates corporum, in quibus illas consideramus.

Hinc quantitas materiæ cujusque corporis repetenda est ex magnitudine, & densitate conjunctim; & propterea definiri debet per productum, quod oritur multiplicando

ma-

magnitudinem per densitatem. Sic aer in spatio duplicato fit duplus, in triplicato triplus; sed idem aer, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fit quadruplus, in triplicato sextuplus. Unde modò duo colligi possunt. Primum, quod si duo corpora eandem habeant materiæ quantitatem, magnitudines, sive moles ipsorum sint reciproce suis densitatibus proportionales. Et alterum, quod si duorum quorumvis corporum magnitudines, sive moles reciprocam servant suarum densitatum rationem, eadem sit in utroque corpore quantitas materiæ.

Jam quum pondus cujusque corporis prope telluris superficiem quantitati suæ materiæ proportionem correspondeat, definietur quoque pondus per productum, quod oritur, multiplicando magnitudinem per densitatem; adedque quemadmodum datâ densitate, pondus erit, ut corporis moles, sive magnitudo; ita quoque datâ magnitudine, pondus erit, ut sola densitas. Sunt ergo densitates corporum, æquales moles habentium, ut pondera ipsorum. Sed si corpora diversas habuerint moles, sive magnitudines; tunc ratio densitatum componetur ex ratione directâ ponderum, & ratione inversâ magnitudinum: aded ut densitas cujusque corporis definietur per relationem,

quam pondus ad molem, five magnitudinem habet.

Vides ergo, quàm facilè definiantur densitates corporum per cognitam illam proprietatem, quod pondus cuiusque corporis quantitati suæ materiæ proportionē respondeat. Sed, ut præclaræ hujus proprietatis demonstrationem aliam in medium afferamus, quæ nullum Tyronum animis scrupulum relinquat; notare prius oportet, diversum corporis situm respectu horizontis, diversamque corporis figuram efficere nullo pacto posse, ut pondus mutationem aliquam patiatur; quum experientia ipsa nos doceat, unumquodque corpus idem semper pondus retinere, quocumque modo positum sit respectu horizontis, nec ejus pondus augeri, vel minui, si ejusdem figura in aliam, atque aliam mutetur.

Inde verò sequitur, vim gravitatis, quæcumque ea sit, non tantum agere in partes corporum exteriores, verum etiam in partes interiores. Nam si vis gravitatis ageret in exteriores tantum corporis partes, ageret utique in eam dumtaxat superficiem, quæ horizonti est averfa, atque aded corporis pondus proportionale foret huic superfici. Unde, quia pro vario corporis situ respectu horizontis, superficies horizonti averfa modò major, modò minor est; erit
cor.

corporis pondus , pro alio , atque alio situ , quem habet ad horizontem , modò majori , modò minori superficiei proportionale ; atque ita non semper manebit idem , & immutatum , quemadmodum docet experientia , sed prout major , aut minor est corporis superficies horizonti averfa , sic & ipsum corporis pondus nunc majus , nunc minus evadet.

Quod si negas , vim gravitatis in eas tantùm exteriores corporis partes agere debere , quæ sunt horizonti averfæ , contendisque illam , relictis partibus internis , in omnes corporis partes exteriores actionem suam extendere ; tunc equidem , etfi mutato corporis situ respectu horizontis , nulla ponderi contingat mutatio , nihilominus corporis figurâ in aliam , atque aliam mutatâ , oporteret , ut aliud , atque aliud resultaret inde corporis pondus . Enim verò mutatis figuris , mutatur externarum corporis partium numerus , five multitudo ; atque ita vis gravitatis , non semper in eundem partium numerum agens , neque idem semper pondus in corpore produceret . Unde , quia experientia docet , mutatis figuris , corporum pondera non mutari , consequens est , ut vis gravitatis agat in omnes corporis partes , & tam externas , quàm internas afficiat.

Atque his porro argumentis, non solum evincitur, vim gravitatis in omnes corporis partes operari, sed æqualiter quoque partes omnes afficere. Nam si ponamus, exēpli gratiā vim gravitatis magis afficere partes horizonti averſas, quā alias omnes, aut etiam magis in externas, quā in internas operari; sequeretur, quod mutato corporis situ respectu horizontis, vel etiam mutata figurā, mutari quoque deberet ipsum corporis pondus, quum non idem maneat numerus particularum, in quibus major est actio gravitatis. Quocirca, quia iis mutatis quotidie experimur, nihil mutationis ponderi corporis accedere; reliquum est, ut dicamus vim gravitatis, non modò in omnes corporis partes operari, verum etiam æqualiter partes omnes afficere.

Ex hac autem, qua vis gravitatis operatur, ratione, facile modò erit ostendere, quod pondus cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportionē correspōdeat. Nam quum vis gravitatis subinde agat in corpora, ut singulas cujusque partes æqualiter afficiat, propter æqualem istam gravitatis actionem singulæ cujusque corporis particulæ æquales subibunt impressiones à gravitate. Jam verò pondus, sive gravitatio corporis totius est aggregatum ex gravitationibus particularum. Igitur si gravitatio,
sive

sive impressio, quam una subit particula, toties repetatur, quotus est numerus particularum, quæ in corpore illo continentur, ea gravitatio sic repetita dabit pondus, sive gravitationem corporis totius.

Quorirca mensura ponderis cujusque corporis est numerus particularum, quæ in corpore illo continentur; nam quò major est earum partium multitudo, sive numerus, eò pluries impressio, quam una subit particula, est repetenda, ut totius corporis gravitatio habeatur. Unde, quia in unoquoque corpore per quantitatem materiæ non aliud intelligitur, quàm complexus, sive numerus particularum, quæ in corpore illo continentur; concludendum est, pondus, sive gravitationem cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportionem correspondere; & propterea duorum quorumvis corporum pondere prope superficiem telluris eandem inter se habere rationem, quæ inter eorundem materiæ quantitates intercedit.

Ex eleganti istâ proprietate, quod pondus cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportionem respondeat, duo colligit Johannes Keill in suâ ad Veram Physicam Introductione. Primum est, quod gravitas in corporibus à pressione subtilis cujusdam materiæ nequeat oriri; nam inquit, si

corpus deorsum à materiâ subtili quovis modo pellatur, vis qua pellitur necessario erit, ut numerus particularum, quibus simul agentibus versus terram truditur; sed numerus particularum est ut corporis superficies: quare erit vis, qua corpus deorsum premitur, ut ejusdem superficies, & non ut ipsius quantitas materiæ.

Alterum, quod vacuum non tantum sit possibile, sed actu detur. Nam si capiamus duos globos, unum plumbi, alterum suberis, æqualium magnitudinum, & eadem esset in utroque quantitas materiæ; per jam ostensa uterque globus æqualiter ponderaret. Experimentiâ autem constat magnum esse in duobus hisce globis ponderum discrimen. Itaque magnum quoque erit in iisdem discrimen materiæ; & si plumbum subere sit triplo gravius, triplo quoque major erit in plumbo contenta materia, quàm in subere. Sunt verò eadem utriusque globi moles, sive magnitudines. Quare plures erunt in plumbo pori, seu spatia absolute vacua; adeoque vacuum non tantum possibile est, sed actu datur.

Non hîc inquiram, num vis gravitatis à pressione materiæ cujusdam subtilissimæ sit repetenda, neque etiam, num vacuum detur, aut dari possit; sed notatu tantum hoc loco dignum existimo, adductis Keillii ratio-

tionibus, neque impossibilitatem mechanicae illius gravitatem explicandi rationis ostendi, neque vacui existentiam adstrui. Nam primò etsi verissimum sit, vim qua corpus pellitur esse, ut numerus particularum, quibus simul agentibus versus terram truditur; falsum tamen est, hunc numerum particularum esse, ut corporis superficies; quia, ut vidimus in calce capitis antecedentis, correspondet multitudini particularum, corpus componentium, in quarum locum, ad fervandum cum aliis æquilibrium, illæ subintrare conantur.

Secundò neque etiam sequitur dari vacuum ex eo, quod magnum sit ponderum discrimen in duobus globis æqualium magnitudinum, uno suberis, altero plumbi. Nam etsi rectè exinde deducatur, majorè esse quantitatem materiae ponderosæ in plumbo contentam, quàm quæ continetur in subere; non hinc tamen concludendum est, in subere plura dari spatiola absolutè vacua, quia repleri possunt materiâ aliâ subtilissimâ, quæ molem corporis augere possit, pondus autem augere non possit. Itaque nisi priùs probetur, gravitatem esse materiae essentialem, & ubicumque reperitur materia, ibi etiam gravitatem inesse; numquam hac viâ poterit vacui existentia suaderi.

Quin etiam, etsi fluidissimam illam ma-
te-

eriam, quæ corporum poros, sive interstitia replere ponitur, gravem, & ponderosam statuamus, quemadmodum eam satis adstruit Jacobus Bernoullius in suâ de gravitate ætheris dissertatione; non hinc tamen colligi potest, illam in suberis poris non reperiri, quia illius pondus non adauget. Nam quum in hac fluidissimâ materiâ innatent corpora omnia, necesse est, ut per ostensa ab Archimede in tractatu de insidentibus humido unumquodque corpus tantam proprii sui ponderis gravitatem amittat, quanta est gravitas molis non dissimilis ejus materiæ; adeoque sicuti aer vasis, quod replet, pondus in ipso aere non auget, ita subtilissima illa materia neque etiam augebit pondus corporis, cujus interstitia replet.

C A P. V.

De velocitate, & quantitate motus, ubi etiam de motu æquabili, & variabili.

TRadita sunt usque adhuc ea Statices principia, quæ corporum gravitatem respiciunt; sequuntur modò illa, quæ ad motum corporum in genere referuntur. Et primò quidem, quid sit motus, malim hîc supponere, quàm accuratâ definitione pro-
fe-

sequi. Est enim motus ex earum rerum numero, quas nemo non intelligit, sed quas velut simplices, & in suo genere primas nemo potest accuratè definire. Et quamquam non satis inter Philosophos conveniat, num detur spatium à corporibus distinctum; at tamen ne ullis hìc difficultatibus implicemur, postulamus, ut liceat nobis extensionem concipere, undequaque infinitam, & immobilem, cujus partibus successivè corpora se applicando, dici possint absolutè moveri.

Quoniam autem omnino implicat, ut unum, idemque corpus simul, & eodem indivisibili temporis momento diversis extensionis illius infinitæ, & immobilis partibus applicatum reperiatur; perspicuum est, motum omnem tempus involvere, nec ullum fieri posse motum; nisi cum tempore. Quid verò sit tempus, clariùs mente concipitur, quàm verbis exprimi potest. Tantū dicemus, illud posse cōsiderari velut fluxum æquabilem signi illius indivisibilis, quod instans, sive momentum communiter dicitur: eodem modo, quo Geometræ lineam ex fluxu puncti, superficiem ex latione lineæ, corpus autem ex motu superficiei suam originem habere concipiunt.

Ex eo porro, quod omnis motus cum tempore conjunctus sit, suborta Mechanicis ve-

MB { velocitatis consideratio, cujus nomine intelligunt id quod efficit, ut mobile datum iter, sive spatium in dato tempore percurrat. Est enim motus effectus spatium, quod mobile percurrit; sed quoniam ad spatium istud percurrendum non idem semper temporis impenditur, hinc factum, ut in corpore mobili præter motum ipsa motus velocitas distingueretur: adeo ut quemadmodum motus effectus est simpliciter spatium, quod percurritur; ita effectus velocitatis sit idem spatium, quatenus in certo tempore peragatur.

Hinc mensura velocitatis in unoquoque mobili est ratio, quam habet spatium ad tempus, hoc est spatium ad ipsum tempus applicatum. Sed spatium intelligi debet, quod mediante definiendâ velocitate percurritur. Unde si motus corporis ejusmodi fuerit, ut velocitas ejus continuò augeatur, vel minuatur; multum abest, ut ista definiri possit per spatium finito aliquo tempore descriptum, applicatum ad ipsum tempus; sed capienda est pars temporis infinitesima, & quam relationem habet spatium hac infinitesimâ temporis parte descriptum ad eandem temporis particulam, per eam definiatur velocitas, quam in illo temporis momento mobile habet, ut clariùs mox ostendetur.

Ex

Ex eo autem, quod definiatur velocitas per spatium, velocitate illâ percursum, ad tempus applicatum, erit mensura spatii ipsa velocitas per tempus multiplicata, & mensura temporis, id quod oritur, applicando spatium ad velocitatem. Quæ quidem omnia clariùs adhuc intelligentur, adhibito calculo algebraico, sive litterali. Nam si spatium dicatur s , tempus t , & velocitas v ; quia ista definitur per relationem, quam habet spatium ad tempus, erit $v = \frac{s}{t}$; adeoque multiplicando per t , erit $t v = s$, hoc est spatium, ut velocitas per tempus multiplicata; & dividendo per v , erit $t = \frac{s}{v}$, hoc est tempus, ut spatium ad velocitatem applicatum.

Corpora mota vim ad agendum habere, nemo est, quem experientia illud non edoceat. Est autem hæc actio major, vel minor, tum pro majori, vel minori quantitate materiæ, quæ existit in corpore mobili, tum pro majori, vel minori velocitate, qua corpus idem urgetur. Unde non meliùs potest definiri, quàm per productum, quod oritur, multiplicando pondus, sive quantitatem materiæ corporis mobilis per velo-

citatem ipsius.

Jam id, quod efficit, ut corpus mobile majorem, vel minorem actionem exerceat, momentum, sive quantitatem motus appellant Mechanici. Unde, quum causæ suis effectibus proportionem respondeant; definiatur quoque momentum, sive quantitas motus cujusque mobilis, multiplicando pondus ejus per velocitatem: proindeque si momentum dicatur m , pondus p , & velocitas u , erit $m = pu$.

Habent ergo momenta duorum quorumvis corporum rationem compositam ex ratione ponderum, & ratione velocitatum. Quocirca si duo mobilia æquales habuerint velocitates, erunt momenta ipsorum, ut sola pondera; & si vicissim æqualia habuerint pondera, erunt eadem ipsorum momenta in solâ velocitatum ratione.

Quod si momenta duorum corporum sint æqualia, tunc ratio, quæ componitur ex ratione ponderum, & ratione velocitatum, erit ratio æqualitatis; adeoque pondera erunt inter se in reciproca velocitatum ratione. Et vicissim si pondera velocitatibus reciproce respondeant, necesse est, ut idem sit utriusque corporis momentum; quum ratio ponderum, & ratio velocitatum componant simul rationem æqualitatis.

Hæc omnia eleganter illustrari possunt
per

per proportiones parallelogrammorum, ab Euclide ostensas in Elementis. Si enim pondera duorum quorumvis mobilium designentur per rectas AB , DE , eorumque velocitates referant rectæ BC , EF ; erunt eorundem mobilium momenta, ut parallelogramma rectangula ABC , DEF : proindeque quæcumque demonstrata sunt de horum rectangulorum proportionem, eadem quoque vera erunt de corporum momentis, hisce rectangulis proportionalibus.

FIG. 3.

Quum corpora eandem semper habent motus quantitatem, dicuntur æquabili motu moveri; quotiescumque verò mutatur in iis quantitas motus, sive quia augeatur, sive quia minuitur, tunc dicuntur moveri motu variabili; qui etiam dicetur acceleratus, si ejus quantitas continuò augeatur; dicetur verò retardatus, si quantitas ejusdem perpetuò minuatur.

Perspicuum est autem, quantitatem motus in corpore mobili non aliter mutari posse, quàm mutatâ velocitate. Unde dici potest etiam motus æquabilis, cujus velocitas maneat eadem, & immutata in omni temporis momento; motus acceleratus, cujus velocitas continuò crescit; & motus retardatus, cujus velocitas continuo minuitur.

Tam accelerati, quàm retardati motus

infini-^{tae} esse possunt variationes, quum velocitas in iis infinitis modis augeri, aut minui possit. Sed speciatim dicetur motus æquabiliter acceleratus, cui temporibus æqualibus æqualia semper accedunt velocitatis incrementa; & vocabitur motus æquabiliter retardatus, cujus velocitas temporibus æqualibus æqualiter decrescit.

Quoniam autem motus æquabilis ille est, cujus velocitas in omni temporis momento manet eadem, & immutata; definietur spatium æquabili motu percursum per velocitatem ductam in tempus; quum in hunc modum ostensum sit superius definiendum esse spatium, quod certo tempore eadem semper velocitate percurritur: adeoque si spatium dicatur s , tempus t , & velocitas v , omnia motus æquabilis symptomata hac formulâ continebuntur $s = tv$.

Inde itaque discimus primò, spatia motu æquabili percurra esse in ratione compositâ ex ratione temporum, & ratione velocitatum. Unde, si tempora fuerint æqualia, erunt ut solæ velocitates; & si vicissim æquales fuerint velocitates, erunt in solâ temporum ratione.

Discimus secundò, velocitates duorum mobilium, quæ feruntur æquabiliter, esse in ratione compositâ ex directâ spatiorum, & reciproca temporum. Unde si tempora fuerint

runt æqualia, erunt ut sola spatia directè; & si vicissim æqualia fuerint spatia, erunt ut sola tempora reciprocè.

Discimus denique, quod si duo mobilia ferantur æquabiliter, tempora, quibus duo quævis spatia percurrunt, sint in ratione compositâ ex directâ spatiorum, & reciproca velocitatum. Unde si velocitates fuerint æquales, erunt ut sola spatia directè; & si vicissim æqualia fuerint spatia, erunt ut solæ velocitates reciprocè.

Eximio Newtono solemne est, proportionem per duos tantum terminos designare. quod equidem quum sit, non modò sermo contrahitur, verum etiam nitidiores, clarioresque evadunt demonstrationes, in quibus proportionem illam adhibentur. Unde, ut huic proportionem designandi modo Tyrones assuescant, non abs re erit recensita motus æquabilis theoremata Newtoniano quoque stylo proferre.

Itaque quantum ad primum, in hunc modum illud proponi debet: spatium æquabili motu descriptum est conjunctim, ut tempus directè, & velocitas itidem directè: unde dato tempore erit, ut sola velocitas directè; datâ verò velocitate erit directè, ut solum tempus.

Quantum ad secundum, debet illud hac ratione proferri: velocitas mobilis æquabi-

liter lati est coniunctim, ut spatium directè, & tempus inversè: unde dato tempore, erit, ut solum spatium directè; dato verò spatio erit, ut solum tempus inversè.

Et denique quantum ad tertium, proponendum est illud in hunc modum: tempus, quo mobile æquabiliter latum spatium aliquod describit, est coniunctim, ut spatium directè, & velocitas inversè: unde datâ velocitate erit, ut solum spatium directè; dato verò spatio erit, ut sola velocitas inversè.

FIG. 3.

Definitur ergo spatium, æquabili motu percursum, per id, quod producitur, multiplicando velocitatem per tempus: unde si recta AB designet tempus, & BC velocitatem; spatium tempore illo percursum designabitur per rectangulum ABC; atque ita quoque si DE referat tempus, & EF velocitatem, designabit rectangulum DEF spatium, quod illo tempore percurritur. Sed nō perinde designari potest spatium motu variabili descriptum, quandoquidem in motu variabili velocitas non manet semper eadem, quemadmodum in motu æquabili, sed perpetuò patitur mutationem.

Interim si capiamus spatium, quod infinitesimâ temporis particulâ describitur, nihil obstat, quo minùs illud designemus per velocitatem ductam in tempus. Etsi enim in motu variabili velocitas continuò

mu-

mutetur , attamen in tempore indefinitè parvo potest velocitas illa , veluti constans , & immutata considerari ; quum mutatio , quam patitur , velut indefinitè parva , tutò negligi possit : proindeque spatium , quod in tempore illo indefinitè parvo percurritur , veluti descriptum motu æquabili poterit haberi ; adeoque optimè definietur per velocitatem ductam in tempus .

Atque hinc modò , si BMN fuerit curva talis , ut interea , ac abscissæ ejus AP , AQ FIG. 4. designant tempora , ordinatæ PM , QN , quæ abscissis iis ad rectos angulos correspondent , referant velocitates , quas in fine eorum temporum corpus mobile habet , designabunt areae curvilineæ APMB , AQNB spatia , in iisdem illis temporibus à mobili descripta : in tantum , ut spatium descriptum tempore AP sit ad spatium descriptum tempore AQ , ut est area APMB ad aream AQNB .

Dividamus enim tempus AP in particulas æquales , & indefinitè parvas AC , CE , EG , &c. , sintque CD , EF , GH ordinatæ correspondentes abscissis AC , AE , AG . Itaque quia velocitas mobilis in tempore AC designatur per CD , spatium tempore illo descriptum erit , ut rectangulum ACD ; atque ita quoque , quia in temporibus CE , EG velocitates mobilis designantur per ordi-

natas EF, GH, erunt spatia temporibus illis descripta, quemadmodum sunt rectangula CEF, EGH.

Sunt igitur spatia descripta in temporibus AC, CE, EG, ut rectangula ACD, CEF, EGH. Sed hæc rectangula non differunt sensibiliter ab areis curvilineis ACDB, CEFD, EGHF. Quare eadem spatia erunt inter se in istâ arearum ratione; & propterea componendo spatium descriptum tempore AG erit, ut area tota AGHB. Unde etiam spatium descriptum tempore AP erit, ut area APMB; & spatium descriptum tempore AQ erit, ut area AQNB.

*Plana velo-
citatum
quid?*

Areas istas curvilineas APMB, AQNB, designantes spatia, quæ temporibus AP, AQ à mobili describuntur, vocabimus in posterum plana velocitatum, utpote quæ exhibent nobis ordinatis suis velocitates, quas in singulis cujusque temporis particulis corpus mobile habet. Unde ostensum theorema, quum occasio dabit, in hunc modum proferemus: spatia motu variabili descripta sunt, ut correspondentia plana velocitatum; vel etiam stylo Newtoniano: spatium, quod describitur à mobili motu variabili, est ut planum suæ velocitatis.

Hoc theorema obtinet etiam in motu æquabili. Nam si ponamus corpus in tempore AQ moveri æquabiliter velocitate QN,
pla-

planum suæ velocitatis erit rectangulum AQNS, cui proportionale est spatium æquabili motu percursum; quandoquidem ordinatæ hujus rectanguli, velut æquales ubique ipsi QN, constantem velocitatem corporis æquabiliter moti in singulis temporis particulis rectè designant. Unde idem theorema efferri potest generaliter in hunc modum: spatium à mobili utcumque descriptum plano suæ velocitatis proportionem correspondet.

Quum corpus aliquod variabili motu movetur, velocitatem, quam in fine temporis reperitur habere, finalem appellabimus. Sed quam proportionem habeat spatium, quod interea temporis describit, ad spatium, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore percurreret, ex dato plano suæ velocitatis haud difficile erit definire. Etenim si APMB sit planum suæ velocitatis, completo rectangulo APMR, erit spatium primum ad spatium secundum, ut APMB ad APMR; atque ita quoque si planum velocitatis sit AQNB, completo rectangulo AQNS, erit spatium primum ad spatium secundum, ut AQNB ad AQNS.

Verum, ut hæc omnia uno, aut altero exemplo illustremus, ponamus primò motum corporis ita variari, ut velocitates pro-

deant continuò temporibus proportionales,

*velocitas si
nalis quid?*

FIG. 5.

Itaque quia in hac hypothefi AP est ad AQ , ut PM ad QN , linea terminans plana velocitatum mutabitur in rectam AMN ; adeoque ipsa plana velocitatum erunt duo triangula similia APM , AQN ; & propterea spatia, his triangulis proportionalia, erunt in duplicatâ ratione tam temporum, quàm velocitatum. Et quoniâ rectangula $APMR$, $AQNS$ sunt dupla eorundem triangulorum; erit quoque spatium, quod dato tempore percurritur, dimidium ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore percurreretur.

FIG. 6.

Ponamus secundò mutationem motus talem esse, ut velocitates servant continuò duplicatam temporum rationem. Quia igitur in hac aliâ hypothefi AP quadratum est ad AQ quadratum, ut PM ad QN ; linea terminans plana velocitatum erit parabola, verticem habens punctum A , & axim rectam AR . Unde quum plana velocitatum APM , AQN sint in triplicatâ ratione rectarum AP , AQ , in sesquiplicatâ verò rectarum PM , QN ; erunt spatia, iis planis proportionalia, in triplicatâ ratione temporum, in sesquiplicatâ verò velocitatum. Quumque rectangula $APMR$, $AQNS$ eorundem planorum sint tripla; erit quoque spatium, quod dato tempore describitur, tertia pars ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem

dem tempore describeretur.

Quemadmodum figuram, in qua abscissæ designant tempora, ordinatæ velocitates, vocamus planum velocitatis; ita distinctionis gratiâ dicemus scalam velocitatis figuram, in qua spatia per abscissas, velocitates per ordinatas designantur. Atque hanc inter scalam, & planum distinctionem, non modò in designandis velocitatibus, verùm etiam in aliis motus functionibus exprimendis usurpabimus; nam quotiescumque aliqua motus functio temporì applicatur, figuram, quæ inde oritur, vocabimus planum illius functionis; quotiescumque verò eadem illa functio applicatur spatio, dicemus figuram inde ortam scalam ejusdem functionis. Unde spatiis ad tempora applicatis, orietur figura, quæ planum spatiorum appellabitur; sed vicissim applicatis temporibus ad spatia, proveniet figura, quæ scala temporum dicetur.

Sed nolim hîc silentio præterire, quòd si scala velocitatis fuerit reciproca, hoc est talis, ut ordinatæ in eâ reciprocè velocitatibus corresponsdeant, eadem proportionalis sit temporì, quo describitur spatium, cui scala correspondet. Sit enim $AQNB$ scala ista, ita ut designatis spatiis per abscissas AP , AQ , corresponsdeant ordinatæ PM , QN reciprocè velocitatibus, quas mobile habet in fine

tem-

*Scala velo-
citatis quid?*

Functio

*Planum
Spatiorum
Scala tem-
porum.*

*Scala velo-
citatis re-
ciproca*

FIG. 7.

temporum, quibus spatia illa describuntur. Dico tempus, quo describitur spatium AP , designari per aream $APMB$, & tempus, quo describitur spatium AQ , designari per aream $AQNB$.

Dividatur spatium AP in particulas æquales, & indefinitè parvas $PC, CE, EG, \&c.$, sintque CD, EF, GH ordinatæ correspondentes abscissis AC, AE, AG . Itaque quia spatium PC , tamquam indefinitè parvum, considerari potest, veluti descriptum motu æquabili; erit idem, ut tempus, quo describitur, & velocitas, quam mobile habet in tempore illo; adedque tempus per PC , erit ut PC directè, & velocitas inversè. Unde quum ex hypothesi velocitas inversè sit, ut PM directè; erit tempus per PC , ut PC directè, & PM etiam directè; adedque erit, ut rectangulum CPM , hoc est, ut areola $CPMD$.

Simili ratiocinio ostendetur, quod tempus per CE sit, ut areola $ECDF$; & tempus per EG sit, ut areola $GEFH$. Quare componendo tempus per PG erit, ut area tota $GPMH$. Unde etiam tempus per AP designabitur per aream $APMB$, & tempus per AQ exprimetur per aream $AQNB$. Et igitur generaliter tempus, quo mobile spatium aliquod describit, erit ut scala reciproca suæ velocitatis.

Ponamus jam spatia peracta esse in ratione
ne

ne directâ velocitatum, quas mobile habet in fine temporum, quibus spatia illa describuntur. Erit igitur in hac hypothese, ut AP ad AQ, ita QN ad PM; adeoque linea terminans scalam reciprocam velocitatum erit hyperbola æquilatera, habens pro suis asymptotis rectas AB, AP. Unde discimus, assumptam hypothese[m] impossibile[m] esse, nec posse in rerum naturâ locum habere. Nam, quum tempora, quibus describuntur spatia AP, AQ, sint ut correspondentes areae hyperbolicæ APMB, AQNB; erit convertendo tempus per AP ad tempus per PQ, ut area infinita APMB ad aream finitâ PQNM; adeoque ad percurrendum ab initio spatium finitum AB tempus requireretur infinitum.

Ponamus vicissim, spatia peracta servare rationem reciprocam velocitatum, quas mobile reperitur habere in fine temporum, quibus spatia illa describuntur. Quia ergo in hac aliâ hypothese AP est ad AQ, ut PM ad QN; linea terminans scalam reciprocam velocitatum mutabitur in rectam AMN. Unde, quia tempora, quibus describuntur spatia AP, AQ, designantur per triangula similia APM, AQN; erunt tempora illa in duplicatâ ratione ipsorum spatiorum, & consequenter in duplicatâ ratione reciproca velocitatum, quas in fine eorundem temporum mobile reperitur habere.

FIG. 5.

CAP.

*De vi motrice ; ubi etiam de vi insitâ , sive
passivâ materiae.*

Commune est Philosophantium votum,
corpora omnia naturalia constare ex
materiâ inertî , & otiosâ , ex qua non modò
nullus in rerum naturâ motus , sed nec ul-
la ad motum tendentia potest oriri . Itaque,
quum corpus aliquod, vel movetur , vel co-
natur se movere , præter ipsam corporis
materiam , aliquid aliud concipi debet , ex
quo motus corporis resultat , vel quod cor-
pus ad motum concitat . Id autem , quod-
cumque sit , vim motricem, sive impressam
deinceps appellabimus ; motricem inquam,
quatenus ab agente procedit; impressam ve-
rò, quatenus à patiente recipitur.

Interim notetur hoc loco velim , quod
etsi in materiâ , velut inertî, & otiosâ, nulla
adsit vis activa, sive motrix ; admitti tamen
debeat in eâ vis quædam passiva, consistens
in renixu illo , quo viribus impressis relu-
ctatur ; quum alioquin nullam istis remo-
ram posset afferre . Neque enim putandum
est , resistere corpora viribus externis pro-
pter quietem ; quia sicuti quies non suscipit
magis , & minus, ita oporteret, ut eadem es-
set

set in corporibus omnibus resistantia. Neque etiam credendum est, vim illam ad resistendum oriri à gravitate, quia experienciâ constat, eam corpora exercere, etiam dum rectâ descendunt.

Oritur ergo in corporibus vis resistantiæ ab ipsâ materiâ; indeque est, ut major sit, ubi major est copia materiæ; & minor, ubi minor materiæ quantitas existit. Hinc rectè eam Johannes Keplerus, Astronomus summus, vim vocavit inertię; quia scilicet ab inertia ipsius materiæ profuit. Sed eandem Angli cum suo Newtono vocant etiam vim insitam, quia nempe non extrinsecus advenit materiæ, quemadmodum vis motrix, sed in ipso materiæ sinu reperitur.

Per vim istam insitam materiæ conatur unumquodque corpus persistere in illo statu, in quo semel est collocatum. Unde etsi nullus ex eâ motus oriatur, inseruit tamen ad motum impressum conservandum; quia sicuti per eam corpus, quod quiescit, semper in quiete manebit, nisi adsit vis aliqua ad motum in eo producendum; ita corpus, quod movetur, semper & eodem tenore movebitur, nisi per vim novam, & contrariam motus ejus sistatur, deturbetur, aut utcunque inflectatur.

Non me latet, adesse Philosophos quosdam, qui facile quidem concedunt, nullum
cor-

corpus posse se ipsum movere, hoc est per se ex quiete ad motum transire; sed non æquè lubenter admittunt, corpora semel mota non posse per se ad quietem tendere; eò quod videant projectorum motus paulatim languescere, tandemque ipsa mobilia ad quietem pervenire. Verùm pravam ipsorum opinionem, ex infantiae præjudiciis haustam, abundè convellunt corpora cœlestia, quorum motibus post inulta annorum millia nihil quicquam videtur detractum; & cœteroquin, quantum ad motus projectorum, existimandum est, idcirco ea tandem aliquando quiescere, quia aer eorum motui resistit, adeòque tantum necesse est ut amittant de motu suo, quantum cum aere communicant.

Desinant itaque Philosophi de causâ continuati motus tot lites instituere; quum non aliunde ea repeti debeat, quàm ex vi insitâ materiæ, per quam conatur unumquodque corpus in eo statu persistere, in quo semel est positum. Et desinant quoque communicati motus causam indagare; nam quum videmus, exempli gratiâ, lapidem ex manu projicientis emissi tanto cum impetu, id non aliunde oriri putandum est, quàm quia lapis in manu contentus, velut unicum cum eâ corpus constituens, participat de motu ipsius manus; adeòque, ubi à manu
se-

sejungitur, per vim insitam materiæ adhuc in eodem motu necesse est, ut perseveret, donec ab agente externo impediatur.

Ob eandem vim insitam materiæ fit etiam, ut omnis motus, quantum in se est, tendat fieri secundum lineam rectam; nam ratione ejus necesse est, ut corpus semel motum pergat moveri eodem, quo cœpit, modo, nisi à viribus externis deturbetur; atqui omnis motus ab initio est rectilineus, quum orbes curvilinei non aliud sint, quàm polygonaliterum infinitorum. Unde etiam vis centrifuga, sive conatus ille recedendi à centro motus, quem habent corpora in orbem acta in omni suæ orbitæ puncto, per rectam lineam, orbitam in puncto illo contingentem, ab eâdem vi insitâ materiæ repeti debet; quandoquidem ubi corpus unum ex infinitis lateribus, orbem curvilineum constituentibus, describit, necesse est, ut ratione suæ inertiae conatum habeat ~~prosequendi~~ ~~sequendi~~ suum motum per ejusdem illius lateris longitudinem; adeoque per rectam lineam, quæ orbem in loco illo contingit.

In eâdem vi insitâ materiæ fundatur quoque lex illa naturæ, adeò celebris apud Philosophos mechanicos nostri temporis, quòd cuilibet actioni æqualis, & contraria sit semper reactio. Nam, quum unum corpus agit in aliud, actio illa eò tendit, ut tollat

in corpore patiente renixum, qui oritur ex ejus vi insitâ. Unde etsi in corpore agente major sit vis ad agendum, quàm in corpore patiente vis ad resistendum; non hinc tamen in mutuâ earum virium collisione vis tota corporis agentis impenditur, sed tantùm portio, quæ adæquat vim corporis patientis; quandoquidem vis reliqua, quum nullam habeat resistantiam, vel renixum absorbendum, in actionem influere nequit.

Sed de vi insitâ materiæ, quæ hætenus dicta sunt, sufficere videntur; redeamus ad vim impressam, sive motricem, unde motus corporibus accedit. Hæc, etsi fortasse simplex, & unica, ac ex eodem ubique principio repetenda, multiplicis tamen formæ in hac rerum universitate se prodit. Neque enim eodem modo nobis se manifestat in gravibus rectâ tellurem petentibus, ac in magnete ferrum ad se trahente; neque etiam eadem est ratio ejus in motu locali fluidorum, ac in eorundem fermentatione, sive motu intestino. Verùm, ut vires omnes, quæ in rerum naturâ sunt, aut fingi possunt, in certas classes distinguam; aptiùs quidquam afferre nescio, quàm ut dicam, aliquas ipsarum esse vagas, nec fixum aliquod punctum respicere; alias verò centrales, & corpora versus punctum aliquod, tanquam centrum, indefinenter urgere.

Vires istas centrales Recentiores post Newtonum appellant quoque vires centripetas, quia corpora viribus iis agitata, quocumque in loco reperiantur, conantur semper petere centrum illud, ad quod vires diriguntur. In harum virium numero ponenda est vis gravitatis in corporibus terrestribus, quippe quæ tellurem versus ipsa corpora terrestria urget. Atque ejusdem indolis sunt quoque vires, quibus planetæ revolvuntur, ac in orbibus suis detinentur, quippe quæ in primariis tendunt ad Solem, in secundariis ad suos primarios diriguntur.

Viribus istis centralibus, sive centripetis contrariæ sunt semper vires centrifugæ, quæ à nonnullis vocantur etiam conatus excussorii: nam quemadmodum per vim centripetam corpus conatur semper accedere ad punctum, versus quod vis ipsa dirigitur; ita per vim centrifugam ab eodem illo puncto continuò recedere conatur. Unde quum corpora in orbem aguntur, atque adeò nec ad centrum virium semper accedunt, nec ab eo continuò recedunt; duæ illæ vires contrariæ centripeta, & centrifuga debent inter se mutuò certâ quadam ratione æquilibrari.

Per solam vim centripetam fieri nunquam potest, ut corpus circa centrum vi-

rium in orbem agatur, sed necesse est, ut corpori imprimatur motus projectilis, ut præter vim centripetam, vim quoque centrifugam nanciscatur. Hinc solius gravitatis ope nequeunt motus planetarum explicari, neque ideo intelligi potest, qua ratione sola gravitas possit esse generale motus principium; nisi dicere velimus cum Platone, planetas omnes, quum primum Dei manibus fuerint fabricati, vi gravitatis motu recto fuisse agitados, sed postquam ad determinata loca venissent, paulatim in gyrum revolvī cœpisse velocitate illā, quam in descensu sibi compararunt.

Jam cujusque naturæ sit vis motrix, quæ motum in corpore producit, ea non aliter debet definiri, quàm per relationem, quam motus, vi illā genitus, habet ad tempus, quo generatur, hoc est per motum applicatum ad tempus. Est enim axioma metaphysicum, ultro ab omnibus admittendum, ut causæ effectibus, quos producunt, sint semper adæquatè proportionales. Quocirca, quia vis motrix, dum corpori applicatur, non alium producit effectum, quàm motum ipsius corporis; per eundem hunc motum, velut suum effectum, definienda erit ipsa vis motrix. Sed necesse est, ut motus ad tempus applicetur, quia quò major est vis, eò minus temporis requiritur, ut data motus
quan-

quantitas in corpore producat.

Sunt ergo vires motrices duorum corporum, ut motus geniti directè, & tempora, quibus generantur, inversè. Unde quemadmodum si tempora sint æqualia, erunt in directâ ratione motuum genitorum; ita vicissim, si motus geniti sint æquales, erunt in ratione reciproca temporum. Sed exinde liquet etiam, motus genitos esse ut vires, & tempora conjunctim; adeoque quemadmodum in temporibus æqualibus sunt in solâ ratione virium; ita vicissim, quum vires sunt æquales, erunt in solâ ratione temporum.

Quoniam autem motus cujusque corporis definitur per quantitatem materiæ ductam in velocitatem; perspicuum est, vim motricem designari quoque posse per id, quod oritur, applicando ad tempus productum ex velocitate, & quantitate materiæ. Unde si data fuerit materiæ quantitas, eadem vis motrix definietur per relationem, quam velocitas genita habet ad tempus; adeoque erit, ut velocitas directè, & tempus inversè: ex quo colligi potest, velocitatem, quam vis motrix generat in dato corpore, definiendam esse per vim ipsam ductam in tempus.

Quod dicimus de datâ quantitate materiæ, obtinet, quotiescumque vis motrix

indefinenter agit in corpus, nec eadem semper perseverat; veluti est vis gravitatis, quæ grave corpus continuò urget, sed decrescit in duplicatâ ratione distantiae à centro, ad quod dirigitur. Si enim definienda esset vis ista unoquoque temporis momento, nulla quantitatis materiæ ratio oportet habeatur, quia jugiter in unum, idemque corpus actionem suam exercet: proindeque satis erit, illam designare per velocitatem, momento illo temporis genitam, ad tempus ipsum applicatam.

Itaque vis, quæ agit in datum corpus, unoquoque temporis momento est, ut velocitas, quam tunc temporis generat, directè, & tempus ipsum inversè. Sed quoniam velocitas definitur per relationem, quam habet spatium ad tempus; perspicuum est, eandem illam vim esse, ut spatium directè, & quadratum temporis inversè. Unde sequitur spatia, quæ unum, idemque corpus duabus quibuscvis viribus initio motus describit esse, ut vires, & quadrata temporum conjunctim.

Verùm ut præclara ista theoremata Tyronum mentibus algebraico calculo altiùs inhæreant, vocetur vis motrix w , motus genitus m , & t tempus, quo motus ille generatur. Itaque, quia vis motrix definitur per relationem, quam motus genitus habet
ad

ad tempus, erit $w = \frac{m}{t}$; adeòque multi-

plicando per t , erit $tw = m$: id, quod ostendit, motum genitum definiendum esse per vim motricem ductam in tempus.

Ullteriùs, si quantitas materiæ, contenta in corpore, cui vis motrix est applicata, vocetur q , & dicatur u velocitas genita in tempore t ; erit $m = qu$: proindeque si loco

m ponatur valor iste in formulâ $w = \frac{m}{t}$, habebitur $w = \frac{qu}{t}$: ex quo patet, eandem

vim motricem definiendam esse, per id, quod oritur, applicando ad tempus productum ex velocitate, & quantitate materiæ.

Assumamus autem q tamquam unitatem: id, quod indicabit, datam esse quantitatem materiæ, contentam in corpore, cui appli-

cata est vis motrix. Fiet igitur $w = \frac{u}{t}$;

adeòque vis motrix erit, ut velocitas directè, & tempus inversè. Quumque multiplicando per t , habeatur $wt = u$; patet, velocitatem, quam in dato corpore generat vis motrix, definiendam esse per vim ipsam motricem ductam in tempus.

Vocetur denique $\int$ spatium, quod percurritur velocitate u in tempore t . Erit ita-

que $u = \frac{\int}{t}$: unde, si loco u ponatur valor iste in formulâ $w = \frac{u}{t}$, erit $w = \frac{\int}{tt}$: id,

quod indicat vim motricem, quæ agit in datum corpus, definiendam esse per spatium ad quadratum temporis applicatû. Quumq; multiplicando per tt , fiat $wtt = \int$, liquet rationem spatiorum, quæ ab uno, eodemque corpore duabus quibuscvis viribus initio motus describuntur, componi ex ratione virium simplici, & ratione temporum duplicatâ.

Quum corpus motum suum accelerat continuò, necesse est, ut vis motrix unoquoque temporis momento agat in corpus, quæ manebit semper eadem, & invariata, si motus corporis sit æquabiliter acceleratus; mutationem verò patietur indefinenter, si incrementa velocitatum, quæ corpus suscipit, temporibus proportionem non respondeant. Jam juxta ea, quæ superiori capite dicta sunt, vocetur planum virium, figura, quæ oritur applicando vim motricem ad tempus; & scala virium figura, quæ nascitur, applicando eandem vim motricem ad spatium. Quibus positis, sequentia duo theoremata sunt nobis ostendenda.

Pri-

Planum
virium
Scala vir-
rium

Primum est, quod planum virium sit, ut velocitas, quam corpus habet in fine temporis, cui planum correspondet. Alterum, quod scala virium sit, ut quadratum velocitatis, quam reperitur corpus habere, postquam peragravit spatium, ad quod scala refertur. Unde tertium suâ sponte profluit: nimirum, quod si spatium, ad quod refertur scala virium, describatur in tempore, cui planum correspondet; scala ipsa sit in duplicatâ plani ratione.

Sit igitur primò $AQNB$ planum virium, aded ut designatis temporibus per abscissas AP , AQ , referant ordinatæ correspondentes PM, QN vires, quæ agunt in corpus in fine eorum temporum. Ostendendum est ergo, velocitatem, quam corpus habet in fine temporis AP , designari per aream $APMB$; pariterque velocitatem, quam corpus reperitur habere in fine temporis AQ , designari per aream correspondentem $AQNB$.

Dividatur etenim tempus AP in particulas æquales, & indefinitè parvas AC, CE, EG , sintque CD, EF, GH ordinatæ correspondentes abscissis AC, AE, AG . Itaque, quia vis motrix, quæ agit in corpus in tempore AC , designatur per CD ; erit velocitas tempore illo genita, ut rectangulum ACD ; atque ita quoque, quia in temporibus CE, EG vires motrices designantur per ordina-

tas

FIG. 4.

tas EF, GH erunt velocitates temporibus illis genitæ, quemadmodum sunt rectangula CEF, EGH.

Sunt ergo velocitates genitæ in temporibus AC, CE, EG, ut rectangula ACD, CEF, EGH. Jam ista rectangula non differunt sensibilibiter ab areis curvilineis ACDB, CEFD, EGHF. Quare eadem velocitates erunt in istâ arearum ratione; & propterea componendo velocitas genita tempore AG erit, ut area tota AGHB. Unde etiam velocitas genita tempore AP erit, ut area APMB; & velocitas genita tempore AQ erit, ut area AQNB.

FIG. 8.

Sit secundò AQNB scala virium, & AQS scala velocitatum, ita ut designatis spatiis per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ PM, QN vires, quæ agunt in corpus in fine temporum, quibus spatia illa percurruntur, & ordinatæ PR, QS velocitates, quas corpus reperitur habere in fine eorundem temporum. Ostendendum est igitur, aream APMB esse ad aream AQNB, ut PR quadratum ad QS quadratum.

Dividatur spatium AP in particulas æquales, & indefinitè parvas PC, CD, &c., & ducantur per puncta C, & D rectæ lineæ EF, GH parallelæ ipsi MR. Erigatur ex puncto R recta RO perpendicularis, & æqualis ipsi PR; & junctâ PO agantur rectæ FT,

FT, HV ipsi RO parallelæ, quæ conveniant cum PO in punctis T, & V; eritque propter similitudinem triangulorum PR $\heartsuit$, PIT, PKV, IT æqualis PI, five CF, & KV æqualis PK, five DH.

Quia igitur ordinatæ CF, PR designant velocitates, quas corpus habet in fine temporum per AC, AP; designabit earum ordinatarum differentia IR velocitatem acquisitam in tempore per PC; adeoque CE, quæ designat vim motricem, agentem in corpus in tempore per PC, erit, ut IR directè, & tempus per PC inversè; & consequenter area PCEM, quæ non differt sensibilibiter à rectangulo PCE, erit ut IR directè, PC etiam directè, & tempus per PC inversè.

Jam verò, quum spatium PC describatur velocitate, designatâ per rectam CF, quantitas, quæ est, ut PC directè, & tempus per PC inversè, designari potest per rectam CF, five IT; quum velocitas sit, ut spatium directè, & tempus inversè. Quare eadem area PCEM erit, ut IR directè, & IT etiam directè; adeoque erit, ut area OTIR, quæ à rectangulo TIR sensibilibiter non differt.

Simili raticinio ostendemus, quod area CDGE sit, ut area TVKI. Quare componendo area PDGM erit, ut area OVKR; & consequenter area tota APMB erit, ut triangu-

gulum OPR, hoc est ut dimidium quadrati, quod fit ex PR. Unde, quum eodem argumento area AQNB sit, ut dimidium quadrati, quod fit ex QS; erit ut area APMB ad aream AQNB, ita PR quadratum ad QS quadratum.

Jam ope horum theorematum, siue detur relatio, quam vis habet ad tempus, siue relatio, quam vis habet ad spatium, facile semper erit velocitatem definire; quandoquidem in primo casu dabitur planum virium, cui velocitas proportionem correspondet; in secundo verò casu dabitur scala virium, cui proportionale est semper quadratum velocitatis. Sed ope eorundem theorematum definietur quoque vis motrix, siue sit data relatio inter velocitatem, & tempus, siue sit data relatio inter velocitatem, & spatium.

FIG. 4.

Quod ut liquidò constet, ponamus primò, velocitatem esse semper tempori proportionalem. Itaque si AQNB sit planum virium, quia ostensum est, aream APMB esse ad aream AQNB, ut est velocitas genita in tempore AP ad velocitatem genitam in tempore AQ; fiet in hac hypothese, ut area APMB ad aream AQNB, ita tempus designatum per AP ad tempus designatum per AQ. Unde quum areae APMB, AQNB sint, ut bases, quibus insistant, AP, AQ; erunt
eae

ex parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta: proindeque, quum BMN fiat recta ipsi AQ parallela, erit vis motrix in omni temporis momento eadem, & invariata.

Ponamus secundò, velocitatem esse semper in duplicatâ temporis ratione. Itaque velocitas genita in tempore AP erit ad velocitatem genitam in tempore AQ, ut est AP quadratum ad AQ quadratum: proindeque quum ostensum sit, velocitatem genitam in tempore AP esse ad velocitatem genitam in tempore AQ, ut est area APMB ad aream AQNB; fiet ex æquali, ut area APMB ad aream AQNB, ita AP quadratum ad AQ quadratum. Unde, quum area illæ debeant esse duo triangula similia, concidentibus punctis A, & B, mutabitur BMN in rectam AMN; adeòque vires PM, QN erunt in ratione temporum AP, AQ: id quod ostendit, assumptam hypothesim impossibilem esse; quum in principio motus vis motrix fiat nulla, nec proinde unquam corpus possit moveri.

FIG. 5.

Non dissimiliter determinabimus vim motricem ex datâ relatione inter velocitatem, & spatium, Ponamus etenim primò velocitatem esse semper in subduplicatâ spatii ratione. Itaque si AQNB sit scala vi-

FIG. 8.

rium, & AQS scala velocitatum, spatia AP,
AQ

AQ erunt, ut quadrata velocitatum PR, QS. Ostensum est autem, aream APMB esse ad aream AQNB, ut est PR quadratum ad QS quadratum. Quare erit ex æquali, ut area APMB ad aream AQNB, ita AP ad AQ; adeoque, quum areae APMB, AQNB sint, ut bases, quibus insistant AP, AQ, erunt eæ parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta. Unde, quia linea terminas scalam virium BMN mutatur in rectam ipsi AQ parallelam, manebit vis motrix unoquoque temporis momento eadem, & immutata.

Ponamus secundò, velocitatem spatio semper proportionem correspondere. Itaque posito rursus, quod AQNB sit scala virium, & AQS scala velocitatum, erit ut AP ad AQ, ita PR ad QS. Jam verò ex superiùs ostensis, area APMB est ad aream AQNB, ut PR quadratum ad QS quadratum. Igitur erit ex æquali, ut area APMB ad aream AQNB, ita AP quadratum ad AQ quadratum: proindeque quum areae illæ debeant esse duo triangula similia, coincidentibus punctis A, & B, linea terminans scalam virium mutabitur in rectam AMN, eruntque aded vires PM, QN in ratione spatiorum AP, AQ: quod argumento nobis esse potest, assumptam hypothese[m] impossibile[m] esse; quum hìc quoque vis motrix prodeat nulla in principio motus. Quod

FIG. 5.

Quod si definienda esset vis motrix ex datâ relatione inter spatium, & tempus, oporteret primò determinare velocitatem per alterutrum duorum theorematum, quæ antecedenti capite demonstravimus, nempe quod planum velocitatis spatium, scala verò velocitatis reciproca temporis proportionem corresponsdeat. Nam determinatâ velocitate, quia datur, tam relatio inter velocitatem, & spatium, quàm relatio inter velocitatem, & tempus; facile deinde erit per ea, quæ modò ostensa sunt, definire vim motricem tum in ordine ad spatium, cum in ordine ad tempus.

Vides igitur adducta circa vires motrices theoremata aded quidem generalia esse, ut non solum omnes motuum genitorum functiones in quacumque virium hypothese determinent, ac definiant, sed etiam facili negotio ostendant, quæ hypotheses possibiles sint, & quas vice versâ natura ferre recuset. Generaliter autem pronunciari debent impossibiles, & imaginariæ omnes illæ hypotheses, in quibus linea terminans, sive planum, sive scalam virium transit per initium sive temporis, sive spatii; quandoquidem, propter ordinatam illic evanescentem, utroque casu vis motrix fit nulla in principio motus. Quæ etiam impossibilitas patebit in determinatione temporis, quod

quod requiritur ad percurrendum ab initio spatium aliquod finitum ; quippe quod infinitum semper invenietur , quum hypothesis in naturâ locum nequit habere.

C A P. VII.

De directione virium , & motuum ; ubi de eorundem compositione , & resolutione.

TAm in motu, quàm in vi motrice considerata est directio , sive determinatio . Linea enim , secundùm quam agit in corpus vis motrix , vocatur directio vis motricis . Linea verò , secundùm quam tendit corpus mobile , directio motus appellatur . Quemadmodum autem omnis motus proportionalis est semper vi motrici impressæ , & si vis in dato tempore motum aliquem generet , dupla duplum , tripla triplum generabit ; ita idem motus in eandem continuò plagam cum vi motrice determinatur , fitque semper secundùm eandem rectam lineam, qua vis illa agit in corpus : unde datâ directione vis motricis , dabitur etiam directio motus, quia utraque per eandem lineam representatur .

Verùm id tunc demùm verum est, quum una tantùm vis motrix agit in corpus . Nam siquidem duabus, aut pluribus viribus corpus

pus urgeatur, quarum diversæ sint directiones; tunc motus ejus fieri potest per rectam lineam, diversam ab unaquaque illarum directionum. Hæc autem, ut pro quolibet numero virium definiatur, ostendendum est prius hoc theorema, quod si corpus aliquod duabus viribus urgeatur secundum latera alicujus parallelogrammi, illud viribus conjunctis describat diagonalem ejus parallelogrammi eodem tempore, quo viribus separatis describeret latera.

Hoc pacto, si corpus aliquod vi solâ M impressâ in loco A ferretur dato tempore uniformi cum motu ab A ad B; idemque vi solâ N impressâ eodem in loco ferretur itidem uniformiter eodem illo dato tempore ab A ad C: completo quidem parallelogrammo ABDC, viribus ambabus feretur corpus, uniformi etiam cum motu, eodem temporis spatio, ab A ad D; adeoque describet viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi AD eodem tempore, quo viribus separatis describeret latera AB, AC.

Id autem hac ratione demonstratur. Quoniam vis posterior N urget corpus secundum lineam AC ipsi BD parallelam; ea nequaquam impediet, ut corpus per vim priorrem M accedat ad rectam illam BD. Itaque in dato illo tempore per vim primam M accedet corpus ad lineam BD, sive vis altera

F

N im-

FIG. 9.

N imprimatur, five non: proindeque in fine illius temporis reperietur corpus alicubi in lineâ illâ BD.

Eodem argumento, quia vis prior M urget corpus secundum lineam AB, ipsi CD parallelam; ea nequaquam corpori erit impedimento, ut per vim alteram N accedat ad rectam illam CD. Quocirca in eodem illo dato tempore per vim posteriorem N accedet corpus ad lineam CD, five vis prior M imprimatur, five non: Et igitur in fine ejusdem temporis reperietur corpus alicubi in lineâ illâ CD.

Quum itaque in fine illius dati temporis reperiri debeat corpus, per vim primam M alicubi in lineâ BD, & per vim alteram N alicubi in lineâ CD; quò ambabus satisfaciat viribus, necesse est, ut reperiat in puncto aliquo, quod commune sit, tum lineæ BD, cum lineæ CD, Unde, quum duæ istæ rectæ lineæ se secant in unico puncto D, in puncto isto corpus in fine temporis reperietur; & propterea feretur per diagonalem AD, quum ab A ad D pergat motu rectilinetico, nec ulla sit causa externa, per quam à motu illo possit deturbari.

Quoniam autem momentum hujus rationis non peræquè ab omnibus intelligitur, non gravabimur aliam ejusdem theorematis demonstrationem asserre, quæ nullum dubi-

bitandi locum relinquat. Et primò quidem, quia nō tam facile omnes intelligunt, quo pacto fieri possit, ut unum, idemque corpus possit simul, & eodem tempore viribus duabus ad diversas partes tendentibus agitari; concipiamus, quod eodem tempore, quo corpus aliquod vi unâ agitatū fertur æquabiliter super rectâ AB ab A ad B, recta ipsa AB per vim alteram moveatur itidem æquabiliter super rectâ AC, ita ut maneat semper sibi ipsi parellela. Sic enim corpus illud subiens quoque motum rectæ AB, super qua motu proprio cietur, urgebitur duplici vi, unâ ab A ad B, alterâ ab A ad C.

Ponamus porrò, quod eodem tempore, quo corpus, super rectâ AB motum, pertingit ad punctum B, recta ipsa AB perveniat ad positionem CD; hocque posito facile erit ostendere per ea, quæ superius demonstrata sunt de spatiis æquabili motu percursis, corpus utrâque vi agitatum describere diagonalem AD. Nam primò, quum ex hypothesis recta AB perveniat ad positionem CD eodem tempore, quo corpus, motum super rectâ AB, pertingit ad punctum B; perspicuum est corpus utroque illo motu reperiri in fine temporis in puncto D, quandoquidem coincidente rectâ AB cum rectâ CD, coincidet quoque punctum B cum puncto D.

Et secundò, si ponamus rectam AB parallelo suo motu pervenisse ad quamvis aliam positionem EF , corpus verò ipsum, motum super rectâ AB , pervenisse ad punctum G ; erit AE ad EG , ut est velocitas rectæ lineæ corpus deferentis ad velocitatem propriam ipsius corporis. Jam verò ratio istarum velocitatum æqualis est rationi, quam habent inter se latera AC , AB ; quum longitudines horum laterum eodem tempore velocitatibus iis percurrantur. Itaque erit ex æquali, ut AE ad EG , ita AC ad AB ; & propterea per vigesimam sextam sexti elementorum locabitur punctum G in diagonali AD .

Ostenso hoc theoremate, haud difficile erit lineam definire, per quam tendit corpus mobile, quum duabus, aut pluribus viribus ad diversas partes tendentibus simul, & eodem tempore urgetur. Si enim corpus urgeatur duabus tantum viribus, quarum directiones, & quantitates designentur per latera AB , AC ; completo parallelogrammo $ABDC$, movebitur corpus, ut ostensum est, per diagonalem AD . Sed si duabus iis viribus accedat tertia, cujus quantitatem, & directionem designet recta AH ; completo parallelogrammo $ADIH$, feretur corpus per diagonalem AI . Et si porò iisdem viribus superveniat quarta AK , com-

completo parallelogrammo $AILK$, diriget motum suum corpus per diagonalem AL : eodemque artificio progredi licebit in infinitum.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam semper ac corpus viribus AB , AC describit diagonalem AD ; vires illæ simultantum poterunt in corpus, quantum vis unica designata per diagonalem ipsam AD ; adeoque, quum corpus urgetur tribus viribus AB , AC , AH , perinde erit, ac si ad motum concitetur duabus tantum viribus AD , AH . Unde, quia duabus hisce viribus ad motum concitatum, describit per ostensum theorema diagonalem AI ; concludendum est, eandem à corpore diagonalem describi etiam, quum urgetur tribus viribus AB , AC , AH .

Eadem ratione semper ac corpus viribus AB , AC , AH describit diagonalem AI , vires illæ simul tantam exerent actionem in corpus, quantam exercebit vis unica, designata per diagonalem ipsam AI ; adeoque quum corpus urgetur quatuor viribus AB , AC , AH , AK perinde erit, ac si ad motum concitetur duabus tantum viribus AI , AK . Jam verò duabus hisce viribus concitatum corpus ad motum, describit vi ostensi theorematidis diagonalem AL . Et igitur consequens est, ut eadem à corpore diagonalis describa-

F 2

tur,

tur, etiam quum urgetur quatuor viribus AB, AC, AH, AK.

Atque hinc modò patet virium compositio, & resolutio, adeò felici successu à Philosophis mechanicis nostri temporis in motibus corporum expendendis adhibita. Quum enim vires duæ AB, AC tantundem agant in corpus, quantum vis designata per diagonalem AD, componetur vis ista AD ex viribus lateralibus AB, AC. Unde etsi corpus haud quidem esset duplici illâ vi agitatum, sed vi simplici, ac indivisâ feratur per diagonalem AD; adhuc tamen vis ista supponi potest composita ex viribus per latera AB, AC, & in eas velut suas partes resolvi; quandoquidem si corpus iis viribus urgeretur, non aliam lineam percurreret, quàm diagonalem ipsam AD.

Et igitur generaliter, si super aliquâ rectâ lineâ, velut diagonali, parallelogrammum aliquod describatur, vis per illam rectam lineam supponi potest composita ex viribus per latera descripti parallelogrammi, atque adeò in easdem illas resolvi, tanquam in suas partes. Sed quoniam super eâdem rectâ lineâ, velut diagonali, infinita possunt parallelogramma describi, innumeræ quoque erunt vires laterales, ex quibus supponi potest composita vis, quæ per illam rectam lineam agit. Unde liquet, quod etsi datis viribus.

com-

componentibus, earumque directionibus, illicò detur vis composita; non tamen vicissim datâ vi compositâ, dentur etiam vires componentes, earumque directiones.

Præterea una, eademque vis, non modò ex duabus, verùm etiam ex tribus, quatuorve composita supponi potest. Nam quemadmodum vis per diagonalem AL supponi potest composita ex viribus per latera AK , AI ; ita si super AI , velut diagonali, parallelogrammum describatur $ADIH$, vis per AI considerari potest veluti composita ex viribus per latera AD , AH : ex quo fit, ut vis per rectam AL haberi possit tamquam composita ex viribus per rectas AD , AH , AK . Et eâdem ratione, si super AD , tamquam diagonali, parallelogrammum aliud describatur $ABDC$, & vis per AD resolvatur in vires per latera AB , AC ; vis per AL supponi poterit composita ex viribus per AB , AC , AH , AK . Atque ita semper procedendo, licebit progredi in infinitum.

Quoniam autem rectæ lineæ AK , IL sunt æquales, & parallelæ; fit hinc, ut vis per diagonalem AL supponi possit composita, tum ex viribus per latera AK , AI , cum ex viribus per latera AI , IL . Et similiter propter parallelas, & æquales AD , HI vis per AI considerari potest composita non modò ex viribus per rectas AH , AD , verùm

etiam ex viribus per rectas AH , HI . Ex quibus demum illud elucescit, quod si super datâ rectâ lineâ, tamquam latere uno, figura quævis rectilinea describatur; vis per rectam illam lineam supponi possit composita ex viribus per reliqua figuræ latera, atque aded in easdem illas tamquam in suas partes resolvi.

Sed examinemus modò effectus, qui oriuntur ex contrarietate, aut conspiratione virium componentium. Quem in finem, sciendum est priùs, vires conspirantes esse illas, quæ versus eandem plagam diriguntur; vires verò contrarias, quæ tendunt ad plagas contrarias, & inter se oppositas ex diametro. Unde quum ostensum sit, vires per latera alicujus parallelogrammi componere simul vim per diagonalem; illud primò in hac re statui potest, vim compositam ed esse majorem, quò conspirant magis vires componentes; & vicissim ed minorem, quò eadem vires componentes magis ad contrarietatem accedunt.

Illrgeatur etenim corpus simul, & eodem tempore duabus viribus, quarum directiones, & quantitates designentur per latera parallelogrammi AK , AI ; ita, ut viribus iis conjunctis describat corpus diagonalem AL eodem tempore, quo viribus separatis describeret ipsa latera AK , AI . Et quoniam

an-

angulus parallelogrammi KAI è quidem est minor, quò vires componentes AK , AI sunt magis conspirantes, & vicissim è major, quo eadem vires magis ad contrarietatem accedunt; erit diagonalis ipsa parallelogrammi AL è longior, quò conspirant magis vires componentes, & vicissim eo brevior, quò eadem vires magis opponuntur inter se mutuò. Unde, quia diagonalis AL designat vim compositam; consequens est, ut vis composita è quidem sit major, quò vires componentes sunt magis conspirantes, & vicissim è minor, quò magis ad contrarietatem accedunt.

Statui secundò potest, quod quantumvis conspirantes supponantur vires componentes AK , AI , modò earum directiones angulum constituent KAI , nunquam vis composita possit eas simul sumptas adæquare, sed summâ ipsarum minor semper esse debeat; nam designatur vis composita per diagonalem AL , quæ minor est summâ laterum AK , AI , quæ vires referunt componentes. Verumtamen si angulus KAI , contentus sub directionibus virium componentium minuatur in infinitum, ita ut tandem evanescat, & conspirent in totum virium directiones; tunc vis composita adæquabit vires componentes simul sumptas, quia in isto casu diagonalis AL , evadit summa laterum.

terum AK , AI .

Et denique statui potest, quod quantumvis contrariæ supponantur vires componentes AK , AI , modò earum directiones angulum constituent KAI , nec jaceant in directum, numquam vis composita possit earum differentiam adæquare, sed semper differentia illa major esse debeat; quandoquidem diagonalis AL , quæ designat vim compositam, major est differentia laterum AK , AI , quæ designant vires componentes. Quod si autem angulus KAI contentus sub directionibus virium componentium augeatur in infinitum, ita ut fiat tandem duobus rectis æqualis, & opponantur ex diametro virium directiones; tunc vis composita adæquabit differentiam virium componentium, quum in isto casu diagonalis AL evadat differentia laterum AK , AI .

Quæ de viribus dicta sunt, possunt etiam applicari motibus, qui sunt virium effectus, aut etiam velocitatibus, quibus motus proportionem respondent, quum data est quantitas materiæ corporis mobilis. Nam quemadmodum vires per latera AK , AI componunt vim per diagonalem AL , quæ eò est major, quò conspirant magis vires componentes, eòque minor, quò eadem vires magis ad contrarietatem accedunt; sic ex motibus per latera AK , AI componetur mo-

motus per diagonalem AL, qui ed major erit, quò sunt magis conspirantes motus componentes, edque minor, quò iidem motus magis contrarii sunt.

Unde porro, quemadmodum quum directiones virium componentium angulum constituunt, vis composita est minor summâ, major differentiâ illarum virium; ita quoque quum directiones motuum componentium angulum comprehendunt, erit motus compositus minor summâ, major differentiâ eorum motuum. Et ulterius, sicuti vis composita adæquat summam virium componentium, quum sunt omnino conspirantes, & differentiam earundem virium, quum sunt prorsus contrariæ, ita motus compositus adæquabit summam motuum componentium, quum eadem est utriusque directio, & differentiam eorundem motuum, quum eorum directiones opponuntur ex diametro.

Ex hac motuum compositione illud colligit Newtonus, nō eandem semper esse in hoc mundo motus quantitatem, quum ex variis binorum motuum compositionibus possit modò major, modò minor motus oriri. Sic iidem motus, qui secundum datas directiones datum motum componunt, component motum majorem, si fiant magis conspirantes, & vicissim motum minorem, si magis
ad

ad contrarietatem accedant. Atque ita quoque si duo globi tenui virgulâ conjuncti uniformi cum motu circa commune ipsorum gravitatis centrum revolvantur, interea ac centrum ipsum uniformi etiam cum motu feratur in lineâ rectâ, ductâ in plano motus ipsorum circularis; summa motuum illorum globorum, quoties erunt in lineâ rectâ à communi ipsorum gravitatis centro descriptâ, major utique erit, quàm summa motuum eorundem, quum erunt in lineâ, quæ sit ad lineam illam rectam perpendicularis.

Verùm etsi hæc omnia vera sint, non hinc tamen colligi potest, quod quantitas motus in hoc mundo eadem semper non perseveret. Quod enim efficit, ut corpus describat diagonalem AL , sunt motus laterales AK , AI : proindeque quantitas motus, quæ tunc temporis in mundo reperitur, non quidem per diagonalem, sive motum compositum AL , sed per summam laterum, sive motuum componentium AK , AI debet defini. Unde etsi motus compositus pro variâ directione motuum componentium modò major, modò minor oriatur, eadem tamen semper erit in mundo quantitas motus, quia summa motuum componentium, per quam ea definitur, eadem semper perseverat.

Id clariùs apparebit, si quemadmodum
su-

superius factum est, unum ex motibus componentibus corpori, alterum rectæ lineæ, super qua corpus fertur, tribuamus. Si enim supponamus, rectam AK moveri super AI motu æquabili, ac parallelo, interea ac corpus super ipsâ AK fertur etiam æquabiliter; quantitas motus, quæ in hoc systemate existet in mundo, definietur per summam laterum AK , AI , cujuscumque magnitudinis sit angulus KAI sub iis lateribus contentus. Jam corpus utroque motu describit diagonalem AL , quæ pro variâ quantitate illius anguli non semper est ejusdem longitudinis. Itaque major, aut minor motus, qui ex binorum compositione oritur, nequaquam efficiet, ut eadem in mundo quantitas motus non perseveret.

Eâdem igitur ratione, etsi verissimum sit, duos illos globos, tenui virgulâ conjunctos, majorem summam motuum habere, quam sunt in lineâ rectâ, à communi ipsorum gravitatis centro descriptâ, quàm quum sunt in lineâ ad istam perpendiculari; non hinc tamen inferri debet, quod non sit semper eadem in mundo quantitas motus: enim verò in eo systemate motus quantitas, quæ in mundo reperitur, definiri debet, non jam per summam motuum in globis existentium, sed per summam ex motu, quo ipsi globi revolvuntur circa commune centrum gravitatis,

tis, velut immobile consideratum, & motu, quo commune fertur gravitatis centrum.

Illud potius argumentum videtur suadere, non eandem semper in mundo motus quantitatem perseverare, quod eruitur ex corporum inertium collisione, nempe quod si duo corpora, adeò perfectè dura, vel etiam adeò planè mollia, ut vim nullam elasticam habeant, sibi mutuò obviam eant, post occursum non eadem perseveret quantitas motus, quæ erat ante occursum, sed destructis motibus contrariis, tantùm maneat differentia eorum motuum. Neque enim huic difficultati fieri potest satis, dicendo motus contrarios non quidem se mutuò destruere, sed circumjacentibus aliis corporibus communicari; nam quum hujus communicationis non alia sit causa, quàm corporum occursum, necesse foret, ut tantundem quoque motus deberet communicari corporibus aliis circumjacentibus, quum corpora versus eandem plagam feruntur: quod tamen falsum est, quum experientia constet corpora, quæ moventur ad eandem partem, tantundem motus post occursum habere, quantum ante occursum habebant.

Interim si consideremus naturam illius materiæ, in qua motus, qui supponitur impressus à Deo, conservatur, & à qua corpora omnia sensibilia moventur, huic quoque dif-

difficultati poterit occurri. Quum enim in hoc Philosophiæ systemate plena sint omnia, nec ullum detur spatium inane, si supponamus universam materiam, hoc magno nostro vortice contentam, & in minutissimas particulas divisam, certâ motus quantitate Dei manibus fuisse agitatam, exilissimæ ejus particulae non potuerunt rectâ progredi, atque ita opus fuit, ut non modò omnes circa centrum totius vorticis, verùm etiam ut plures circa unum, idemque punctum circulariter moverentur: unde ex universâ illâ materiâ quamplures exigui vortices formati fuerunt, qui quum ex minutissimis particulis celeriter agitatis componantur, facile intelligemus in unoquoque eorum reperiri conatum quendam centrifugum, per quem minutissimæ illæ particulae à centro motus continuò tendant recedere.

Quum igitur materia, quæ motum à Deo impressum conservans, corpora omnia sensibilia movet, & agitat, sint exigui quidam vortices, conatu quodam centrifugo præditi; haud difficile modò erit, rationem reddere, cur fiat, ut quum corpora inertia sibi mutuò obviam eunt, maneat post occursum, non summa, sed differentia motuum, nec tamen pereant motus contrarii. Notum est enim, corpora perfectè elastica, & ejusdem ponderis, quum sibi mutuò æqualibus

bus

bus velocitatibus obviam eunt, resilire à se invicem, nullâ velocitatis parte amissâ. Itaque quum exigui illi vortices, velut conatu quodam centrifugo referti, considerari possint tamquam corpuscula elastica; iidem, quum sibi invicem occurrunt, resiliunt ad partes contrarias eâdem velocitate, qua ante occursum ferebantur.

Et quoniam corpora sensibilia moventur, quia ab exiguis istis vorticibus impelluntur; fit hinc, ut in occursum corporum sensibilium occurrant etiam sibi mutuo exigui vortices, corpora illa impellentes. Unde remanebit in ipsis corporibus post occursum dumtaxat motuum differentia; quandoquidem exigui vortices corpus unum impellentes impingunt in alios totidem eorum, qui corpus aliud impellunt: ex quo fit, ut tam illi, quàm isti resiliant ad partes contrarias; atque ita ipsa corpora pergent moveri, quia à reliquis tantum vorticibus impelluntur. Sed hæc dicta sint in gratiam eorum, qui hoc philosophandi genere delectantur: nam ingenuè fateor, me animum non adeò docilem habere, ut possim iis libenter acquiescere; quum ea semper mihi placuit philosophandi ratio, quæ non fictis hypothesebus, sed certissimis experimentis innititur.

S E C T I O II.

De Artificiosâ Gravium Latione.

Corpora gravia artificiosè ferri dicuntur, quotiescumque machinarum ope aliâ ratione moventur, quàm secundùm directionem gravitatis; veluti quum funibus, & orbiculis sursum attollũtur, vel etiam quum ducuntur per longitudinem plani horizontalis. De artificiosâ istâ gravium latione, ut ab initio monuimus, tractarunt Veteres sub nomine *Mechanices*: unde etsi tale nomen machinandi artem propriè significet, communiter tamen usurpatur ad designandam eam *Statices* partem, quæ gravia considerat, quatenus debent artificiosè moveri:

C A P. I.

De principio mechanices fundamentali, & de applicatione ejus ad machinas simplices.

Quum grave aliquod corpus fertur artificiosè, quemadmodum instrumentum lationis machinam, ita id, quod est causa motus, potentiam *Mechanici* vocant

G

Sed.

Sed quod in hac latione potentiaë opponitur, & reluctatur, non est semper corporis pondus. Nam, quum corpus scinditur per cuneum, aut per cochleam comprimitur, non aliunde oritur resistentia, quàm à cohæsione partium corporis; & similiter quum corpora in solo ducuntur, à solâ inertia materiaë oritur in ipsis corporibus resistentia, sive reactio.

Hinc in definiendis motibus gravium artificiosis, id quod potentiaë opponitur, & reluctatur, modò pondus, modò resistentiam dicemus; pondus, inquam, quum renixus oritur à gravitate; resistentiam verò, quum aliunde, quàm à gravitate, proficiscitur. Et quamquam cum pondere conjuncta sit semper inertia materiaë, attamen quum collisio fit inter potentiam, & pondus, illius inertiaë nullam rationem habebimus, sed considerabimus corpus veluti reductum ad punctum illud, in quo tota vis suæ gravitatis colligitur, & coacervatur.

Quum ablatâ ex corpore resistentiâ, possit illud moveri per omnem quantumvis minimam vim; fit hinc, ut ad determinandam potentiam, per quam grave corpus artificiosè moveri queat, definiendus sit primò casus æquilibrii inter potentiam, & pondus, sive resistentiam. Nam semper ac potentia æquilibratur cum eo, quod in la-

tione corporis gravis ipsi opponitur, & reluctatur; jam ex corpore sublatum erit id omne, quod impedit motum ejus optatum: adeoque si tantillum augeatur potentia, corporis motus protinus obtinebitur.

Potentia, & resistentia æquilibrantur inter se inutud, quum æqualia habent momenta, sive motus quantitates; nam ratione æqualium momentorum, quantum potentia agit in resistentiam, tantundem resistentia potentiæ reluctabitur. Unde quia ex superius extensis nequeunt potentia, & resistentia habere æqualia momenta, nisi fuerint in reciproca ratione suarum velocitatum; æquilibrabitur potentia cum resistentiâ, siquidem ratione machinæ in tali sint ad motum dispositione, ut resistentia sit ad potentiam, quemadmodum est velocitas, qua ageret potentia, ad velocitatem, qua reluctaretur resistentia.

Et quoniam velocitates duorum mobilium sunt, ut spatia, quæ eodem tempore describunt; æquilibrabitur quoque potentia cum resistentiâ, si talem iis machina ad motum tribuat dispositionem, ut resistentia sit ad potentiam, quemadmodum est spatium, quod describeret potentia, ad spatium, quod interea temporis percurreret resistentia. Unde ad determinandam potentiam, quæ cum datâ resistentiâ æquibre-

tur, non aliud fieri debet, quàm definire relationem velocitatum, aut etiam spatiorum, quæ eodem tempore ab iis describerentur; quandoquidem potentia, quæ est ad resistantiam in reciproca illâ ratione, cum ipsâ resistantiâ æquilibrata manebit.

Atque hoc quidem est principium fundamentale mechanices, quod ad omnes omnino machinas extenditur; nec vereor dicere, impossibile prorsus esse, ut aliud reperiatur, quod universalitate, ac simplicitate suâ possit cum isto contendere. Reliquum jam est, ut illud ad machinas saltem simpliciores applicemus, nimirum ad libram, vectem, polyspastum, axem in peritrochio, cochleam, & cuneum: qua in re ordiemur à librâ, utpote quæ, communi omnium voto, inter mechanica instrumenta primum sibi vindicat locum.

FIG. 10.

Est igitur libra recta quædam linea puncto aliquo medio, vel liberè suspensa, vel etiam fulcimento suffulta, ex cujus extremitatibus pendent pondera duo. Ita si recta linea AB puncto sui medio C, vel liberè suspendatur, vel etiam innitatur fulcimento aliquo, & ex extremitatibus ejus A, & B pendeant pondera duo M, & N; linea ista his ponderibus instructa libra dicetur. Et quoniam, quæ in se mutuò agunt, sunt ipsa pondera M, & N; subibit alterum ipso-

forum vices potentiae, alterum vices resistentiae.

Jam servabitur inter hæc duo pondera æquilibrium, si ratione libræ fuerint in tali ad motum dispositione, ut pondus M sit ad pondus N, velut est velocitas, qua moveretur pondus N, ad velocitatem, qua moveretur pondus M. Unde quia in libræ revolutione velocitates ponderum N, & M eadem sunt, quæ punctorum B, & A, ex quibus suspenduntur; & velocitates istorum punctorum definiuntur per distantias eorundem à centro libræ, hoc est per rectas BC, AC; servabitur æquilibrium inter pondera M, & N, si fuerit ut pondus M ad pondus N, ita BC ad AC; hoc est, si fuerint ipsa pondera in reciproca ratione suarum à centro libræ distantiarum.

Quod autem in libræ revolutione distantia BC, AC proportionem corresponsdeant velocitatibus punctorum B, & A; id equidem dependet ex motu circulari. Nam generaliter si recta quædam linea inflexilis, velut AB, circulariter moveatur circa aliquod ejus punctum C; velocitates punctorum A, B, D erunt, ut distantia eorundem à centro motus AC, BC, DC. Sunt quippe velocitates eorum punctorum, ut arcus AE, BF, DG eodem tempore descripti; qui quidem arcus, propter similitudinem sectorum CAE,

FIG. II.

G 3

CBF,

CBF, CDG, sunt ut radii AC, BC, DC.

Secundò vectis est oblongus ille palus, qui ad ingentia corpora movenda passim adhibetur, quemque considerant vulgò Mechanici velut lineam inflexilem, omnisque gravitatis expertem. In eo tria sunt distinguenda; scilicet pondus, quod sursum debet attolli; potentia, per quam pondus elevatur; & fulcimentum, cui vectis innititur, id quod græcè hypomochlion dicitur. Et quoniam hæc tria tripliciter in ipso vecte disponi possunt; tria hinc etiam vectium genera distinguuntur.

FIG. 12. Vocatur etenim vectis primi generis, qui habet pondus in uno extremo, potentiam in altero, & hypomochlion in puncto aliquo intermedio. Qui verò habet pondus in

FIG. 13. medio, potentiam in uno extremo, & hypomochlion in altero, vocatur vectis secundi generis. Et denique qui potentiam habet

FIG. 14. in medio, hypomochlion in uno extremo, & pondus in extremo altero, vectis tertii generis appellatur.

Cujuscumque generis sit vectis, fiet æquilibrium inter potentiam, & pondus, si potentia fuerit ad pondus, ut distantia ponderis ab hypomochlio ad distantiam potentiae. In vecte etenim AB sit pondus in A, potentia in B, & hypomochlion, sive fulcimentum in C. Itaque ob principium fun-

fundamentale mechanices æquilibrabitur potentia cum pondere, si ratione vectis fuerint in tali ad motum dispositione, ut potentia sit ad pondus, quemadmodum est velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ.

Et quoniam pondus est applicatum in A, potentia autem in B; habebunt in motu vectis pondus, & potentia easdem velocitates, ac puncta A, & B. Unde, quia motus vectis fit circa punctum immobile C, adeoque velocitates punctorum A, & B sunt, ut distantia AC, BC; erit velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ similiter, ut AC ad BC. Et igitur æquilibrabitur in vecte potentia cum pondere, si fuerit, ut potentia ad pondus, ita distantia ponderis ab hypomochlio ad distantiam potentiæ.

Hinc, quia in vecte primi generis distantia ponderis ad distantiam potentiæ potest habere rationem, tum minoris ad majus, tum majoris ad minus, tum denique æqualitatis; perspicuum est, in eodem vecte potentiam esse posse tum minorem, tum majorem, tum æqualem ponderi, quod sustinet. Verum in vecte secundi generis potentia semper minor est pondere, quia distantia ponderis ad distantiam potentiæ habet semper rationem minoris ad majus. Et denique in vecte tertii generis potentia pondere semper est major, quia distantia ponderis

deris ad distantiam potentiæ habet semper rationem majoris ad minus.

FIG.
15. 16.

Tertiò axis in peritrochio est oblongus quidam cylindrus horizonti parallelus, vel perpendicularis, cujus extremitates in rotundis foraminibus immoti pegmatis expeditè vertuntur. Habet prope unam ejus extremitatem circumpositam rotam, sive tympanum, in cujus convexâ peripheria stipites teretes, foraminibus ad id factis, sunt affixi. Et quemadmodum vocatur axis, ipse quidem cylindrus horizonti parallelus, vel perpendicularis; ita dicitur peritrochium, rota, sive tympanum, quod habet circumpositum; & radii, sive scytalæ, baculi illi teretes, qui in convexâ rotæ peripheriâ sunt affixi.

Hujus instrumenti usus in ponderibus, vel sursum elevandis, vel horizontaliter trahendis ut plurimum consistit. Nam si funes ad pondus alligati circa depresso axis partes circumponantur, & peritrochii scytalis potentia applicetur, quæ peritrochium vertat unâ cum axe; jam funes circa axem convoluti, vel ab aliquo relecti, ne toti axi circumponantur, pro variâ ipsius axis ad horizontem positione, pondus ipsum vel sursum elevabunt, vel horizontaliter trahent.

In hoc instrumento æquilibrabitur potentia

tia cum pondere, si fuerit ut potentia ad pondus, ita perimeter axis ad perimetrum orbis extimi. Nam in unâ ejus conversione pondus tantundem trahitur, quantum funis circa axem complicatur, hoc est, quanta est perimeter ipsius axis; & potentia tantundem promovetur, quanta est perimeter ejus orbis, quem scytala describit. Quocirca in unâ machinæ revolutione spatium descriptum à pondere erit ad spatium descriptum à potentiâ, ut est perimeter axis ad perimetrum orbis extimi; & ideo, quum velocitates sint, ut spatia eodem tempore descripta, erit quoque ut velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ, ita perimeter axis ad perimetrum orbis extimi.

Hinc quotiescumque in axe in peritrochio potentia eam habet rationem ad pondus, quam habet perimeter axis ad perimetrum orbis extimi; jam potentia, & pondus erunt in tali ad motum dispositione, ut si utique machina revolveretur, potentia foret ad pondus, ut est velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ. Unde, quia ex principio mechanices fundamentali æquilibratur potentia cum pondere, quotiescumque sunt in reciproca suarum velocitatum ratione: consequens est, in axe in peritrochio adesse æquilibrium inter potentiam, & pondus, quum fuerit, ut potentia ad pondus, ita peri-

perimeter axis ad perimetrum orbis extimi.

Hæc machina construi quoque solet nullo adhibito peritrochio, applicando nempe scytalas ad foramina facta in perimetro ipsius axis: quo casu eadem adhuc requiritur proportio inter potentiam, & pondus, ut maneant in æquilibrio: nempe, quod potentia debeat esse ad pondus, ut est perimeter axis ad perimetrum orbis, quem potentia uni ex scytalis applicata describit. Sed interim hæc machina, sine peritrochio elaborata, nequit ampliùs dici axis in peritrochio. Quocirca dicta est sucula, quum axis perpendicularis est ad horizontem; ergata verò, quum idem axis est horizonti parallelus.

FIG.
17. 18.

Quartò polyspastum, sive trochleam vocant Mechanici machinam quandam ex uno, aut pluribus orbiculis circa axes suos volubilibus compositam, quibus circumpositus funis ductorius pondus per potentiam trahit. Orbiculi isti ita disponi possunt, ut pondus nunc ab uno fune, nunc à duobus, aut pluribus sustineatur. Unde hujusmodi machinam vocant specialiter Mechanici monospastum, quum pondus sustinetur ab uno fune; bispastum, quum à duobus; trispastum, quum à tribus; atque ita deinceps.

In omni polyspasto, si fuerit, ut potentia ad pondus, ita unitas ad numerum funiculo-

lorum, quibus pondus sustinetur, æquilibrium habetur potentia cum pondere, illudque sustinebit. Nam si ponamus pondus à potentiâ sursum per unum pedem attolli, quia unusquisque funiculus pondus sustinens debet uno pede brevior reddi, percurrent potentia pedes totidem, quot sunt ipsi funiculi pondus sustinentes. Unde velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ erit, ut unitas ad numerum funiculorum; quum in hac ratione sint spatia, quæ eodem tempore ab iis percurruntur.

Hinc quotiescumque potentia eam habet rationem ad pondus, quæ est inter unitatem, & numerum funiculorum pondus sustinentium; jam potentia, & pondus ratione machinæ erunt in tali ad motum dispositione, ut si utique machina moveretur, foret ut potentia ad pondus, ita velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ. Ex principio autem mechanices fundamentali æquilibrium habetur potentia cum pondere, quum reciprocam servant suarum velocitatum rationem. Et igitur in omni polyspasto, si fuerit, ut potentia ad pondus, ita unitas ad numerum funiculorum pondus sustinentium, æquilibrium habetur potentia cum pondere, illudque sustinebit.

Quintò cochleam vocant Mechanici rectum cylindrum helice similiter fulcatum,

cujus duas species distinguunt ; unam nempe interiorē , sive masculeam , in qua sulcata superficies est convexa ; alteram exteriorē , sive femineam , cujus superficies sulcata est concava. Ex utrâque simul conjun-

FIG. 19. Quâ hujusmodi componunt instrumentum : nempe ut AB sit cochlea masculea , quæ per potentiam applicatam manubrio AC labatur tota sive sursum , sive deorsum per duas alias cochleas femineas immotas , ipsi quidem aded conformiter sulcatas , ut ejus eminentiæ cavitatibus istarum correspondeat adamussim .

Hoc instrumentum tametsi ponderibus elevandis possit applicari , nimirum quum cochlea interior , sive masculea AB sursum per potentiam manubrio AC applicatam attollitur ; potissimum tamen adhiberi solet ad corpora frangenda , aut comprimenda , aliosque motus trusione faciendos ; & propterea juxta ea , quæ initio hujus capitis monuimus , in hac machinâ potentiam non quidem cum pondere , sed cum resistentiâ comparabimus .

Æquipollebit autem in hac machinâ potentia resistentiæ , si fuerit ut potentia ad resistentiam , ita intervallum duarum proximè spiralium ad ambitum potentiæ . Per potentiam enim applicatam manubrio AC labatur cochlea interior AB per alias duas ex-

te-

teriores immotas ; jamque interea ac potentia revolutione unâ describit ambitum totum CD , cochlea ipsa , & consequenter resistentia superanda tantundem spatii describet, quantum est intervallum duarum proximè spiraliū: proindeque velocitas resistentiæ erit ad velocitatem potentiæ , ut intervallum duarum proximè spiraliū ad ambitum potentiæ.

Quocirca quotiescumque potentia eam habet rationem ad resistentiam , quam habet intervallum inter duas proximè spiras ad ambitum potentiæ ; jam potentia, & resistentia ratione machinæ erunt in tali ad motum dispositione , ut potentia sit ad resistentiam , quemadmodum est velocitas resistentiæ ad velocitatem potentiæ. Ex principio autem mechanices fundamentali æquilibratur potentia cum resistentiâ , quum reciprocam servant inter se suarum velocitatum rationem . Igitur æquipollebit potentia resistentiæ , si fuerit , ut potentia ad resistentiam , ita intervallum duarum proximè spiraliū ad ambitum potentiæ .

Et denique cuneus est simplex quoddam instrumentum , ad findenda , sive scindenda corpora aptum, mediante percussione. Construitur enim ex ferro , aut aliâ quavis durâ materiâ ad formam prismatis non admodum alti , cujus opposita latera sunt duo
trian-

triangula isoscelia, & æqualia. Vocatur autem cunei acies recta illa linea, quæ isoscelium triangulorum vertices conjungit; cunei altitudo recta linea, quæ cujusque trianguli altitudinem metitur; crassities, basis cujuscumque trianguli; ac denique dorsum, parallelogrammum, quod bases conjungit ipsorum triangulorum. Adhibetur porro ad scindenda corpora, quotiescumque cunei acie in rimulam aliquam scindendi corporis immittitur, & adveniente validâ percussione, quæ per malleum, super cunei dorsum adactum, fieri solet, totus cuneus in rimulam immittitur.

In hoc instrumento, quod potentia opponitur, & reluctatur, est resistentia, quæ oritur ex coherentiâ fibrarum scindendi corporis. Æquipollebit autem in eo potentia resistentiæ, si fuerit, ut potentia ad resistentiam, ita cunei crassities ad ejusdem altitudinem. Supponamus enim, cuneum

FIG. 20. ABC, per potentiam directè dorso applicatam, eò usque adactum esse, donec obtineat situm, quem schema repræsentat: scilicet, ut BG sit spatium percursum à cuneo, & consequenter à potentiâ secundum suam directionem, EF verò spatium, quod percurrunt scindendi corporis fibræ, quum à se mutuo separantur; jamque erit, ut velocitas resistentiæ ad velocitatem potentiæ, ita EF ad BG.

Ec

Et quoniam EF est ad BG, ut crassities cunei AC ad ejusdem altitudinem BD; erit ex æquali, ut velocitas resistentiæ ad velocitatem potentiæ, ita cunei crassities ad ipsius altitudinem: proindeque quum in cuneo potentia, & resistentia eam habent rationem inter se, quæ est inter cunei crassitiem, & altitudinem; jam ratione cunei in tali erunt ad motum dispositione, ut reciprocam servant suarum velocitatum rationem. Sed ex principio mechanices fundamentali servatur æquilibrium inter potentiam, & resistentiam, quum potentia est ad resistentiam, ut velocitas resistentiæ ad velocitatem potentiæ. Et igitur in cuneo potentia æquipollebit resistentiæ, si potentia fuerit ad resistentiam, ut est crassities cunei ad ejusdem altitudinem.

Nihil hîc addimus de ponderibus, quæ per longitudes planorum inclinatorum sursum trahuntur, quia de iis commodior erit agendi locus, ubi de motu gravium naturali sermo recurret. Tantùm hoc loco monendum existimamus, quod siquidem ex eodem fundamentali mechanices principio plani inclinati proprietas esset deducenda, ad definiendam velocitatem corporis gravis, habenda foret ratio spatii, quod non obliquè, sed verticaliter grave corpus describit. Comparatur enim cum potentiâ pondus corporis

poris absolutum, cuius equidem effectus est, ut grave rectâ accedat ad horizontem.

Vulgares Mechanici omnes alias machinas ad vectem revocare conantur, & ex cognitâ vectis proprietate earum omnium colligunt affectiones; sed & ipsum vectem ad libram reducunt: imitati Aristotelem, qui in suâ mechanicâ, quæ circa libram fiunt, ad circulum; quæ circa vectem, ad libram; quæ autem circa omnes alias machinas, ad vectem revocavit. Ex quo factum, ut non aliam mechanices ponant propositionem fundamentalem, quam eandem illam, quæ in librâ statuit ponderum æquilibrium.

Hanc propositionem, quæ totius mechanicæ disciplinæ fundamentum ipsis evadit, ostendunt communiter demonstratione Archimedeâ, prout eam restituit, & vindicavit Galilæus. Innititur hæc demonstratio proprietati centri gravitatis: nempe quod si corpus aliquod ex proprio suæ gravitatis centro suspendatur, illud moveri non possit. Est autem elegans sanè, & ingeniosa demonstratio, quam ne aliunde petant Tyrones nostri, illam hîc afferre non gravabimur.

FIG. 21.

Sit itaque AB prisma, five cylindrus ejusdem ubique densitatis, idemque planis parallelis secetur bifariam in C, & non bifariam in D; sitq; AD pars major, & DB pars mi-

minor. Harum partium puncta media, sive centra gravitatis sint E, & F, ex quibus erigantur duæ rectæ æquales EG, FH, quæ ipsi AB perpendiculares, alligentur extremitatibus libræ GH. Ex C porro, centro gravitatis totius prismatis erigatur perpendicularis altera CI, quæ libræ occurrat in I; & constituatur I centrum ipsius libræ.

Jam si partes prismatis AD, DB simul essent unitæ, quia in rectibus, & librâ nullam gravitatem consideramus, facile intelligemus manere prisma æquilibratum, quotiescumque libra suspenditur ex puncto I; quandoquidem perinde se res habebit, ac si prisma suspenderetur ex puncto C, quod est centrum suæ gravitatis. Sed factâ partium scissione, nullus in iis motus contingere potest, quum suspendantur per rectas ex punctis E, & F, quæ sunt centra gravitatis earum partium. Itaque partes prismatis AD, DB manebunt æquilibratæ, quotiescumque libra suspenditur ex puncto I.

Et quoniam prisma est ejusdem ubique densitatis, pondera partium AD, DB erunt inter se, ut magnitudines earundem. Sed ex Geometriæ Elementis magnitudines partium AD, DB sunt, ut longitudines ipsarum, quarum semisses sunt rectæ DE, DF. Quare erit ex æquali, ut pondus partis AD

H

ad

ad pondus partis DB, ita recta DE ad rectam DF: & propterea, quum rectæ DE, DF æquales sint ipsis IH, IG; erit rursus, ut pondus partis AD ad pondus partis DB, ita IH ad IG.

Sunt igitur pondera AD, DB, in æquilibrio constituta, in reciproca ratione suarum à centro libræ distantiarum. Et quoniam pondera corporum, mutatis figuris, nullam patiuntur mutationem, sed eadem semper perseverant; proinde si concipiamus prismatis partes AD, DB in corpora spherica, cubica, aut alterius cujusvis figuræ mutari, adhuc etiam manebunt in æquilibrio. Et igitur generaliter si ex libræ extremitatibus pendeant pondera duo, ea non poterunt esse in æquilibrio, nisi reciprocam servant rationem suarum à centro libræ distantiarum.

C A P. II.

De communi centro gravitatis quocumque corporum, & de præcipuis ejus affectionibus.

Quemadmodum in unoquoque corpore vocamus centrum gravitatis punctum illud corporis internum, circa quod omnes ejus partes subinde librantur, ut si exinde suspendatur, eundem semper suarum par-

partium situm retinebit ; ita duorum quorumvis corporum, in eodem plano horizontali jacentium, dicemus commune gravitatis centrum punctum illud, subinde situm in rectâ lineâ, ipsorum propria centra conjungente, ut distantiae corporum ab illo puncto sint in reciproca ratione suorum ponderum.

Hac ratione, si A, & B sint duo quaelibet corpora, existentia in eodem plano horizontali, quorum centra gravitatis conjungat recta AB, & dividatur recta ista AB subinde in puncto C, ut distantia AC sit ad distantiam BC, veluti est pondus corporis B ad pondus corporis A ; vocabimus punctum C commune centrum gravitatis duorum corporum A, & B : enim verò si ambo suspendantur ex puncto isto, manebunt inter se mutuò æquilibrata, nec unum ab altero poterit attolli.

FIG. 22.

Jam si duobus iis corporibus A, & B accedat tertium D, & commune centrum gravitatis illorum conjungatur cum proprio centro istius per rectam CD ; punctum E, subinde situm in rectâ istâ, ut distantia CE sit ad distantiam DE, veluti est pondus corporis D ad pondera corporum A, & B, dicetur commune centrum gravitatis eorum omnium ; quum suspensis similiter iis ex puncto illo, maneant omnia inter se mu-

tuò æquilibrata, nec ullum per aliorum actionem possit attolli.

Eâdem autem ratione, si tribus iis corporibus quartum superveniat F , cujus proprium centrum gravitatis conjungatur cum communi centro illorum per rectam EF ; punctum G , quod ita dividit rectam istam, ut distantia EG sit ad distantiam FG , quemadmodum est pondus corporis F ad pondera corporum A, B, D , dicetur commune centrum gravitatis corporum omnium: eodemque artificio poterit quocumque corporum commune gravitatis centrum definiri.

Et quidem corpora duo $A, \& B$ manere in æquilibrio, quotiescumque suspenduntur ex puncto C ; nemo in dubium revocabit, postquam ostensum est, æquilibrari inter se mutuò pondera illa, quæ subinde pendunt ex libræ extremitatibus, ut reciprocam servant rationem suarum à centro libræ distantiarum. Sed quod idem servetur æquilibrio, quum corpora tria A, B, D suspenduntur ex puncto E , vel etiam quum corpora quatuor A, B, D, F suspenduntur ex puncto G ; id equidem non ita facile ab omnibus concedetur.

Ult enim in tribus primum corporibus A, B, D dubitandi rationem proponamus, etsi facile sibi quisque in animum inducat,
ser-

ad pondus corporis A. Est autem ut CE ad DE, hoc est, ut CL ad DH, ita pondus corporis D ad pondera corporum A, & B. Quare erit ex æquo perturbando, ut AH ad DH, ita pondus corporis D ad pondus corporis A.

Et quoniam AH est ad DH, ut pondus corporis D ad pondus corporis A; erit componendo ut AD ad DH, hoc est ut AI ad HE, ita pondera corporum A, & D ad pondus solius corporis A. Est autem, ut BC ad AC, hoc est ut BE ad AI, ita pondus corporis A ad pondus corporis B. Igitur ex æquo rursus perturbando BE erit ad HE, ut pondera corporum A, & D ad pondus corporis B.

Servatur ergo æquilibrium, etiam quum duo corpora A, & D agunt in tertium B, quia tantam illa exerunt actionem in locis suis, quantam si existerent in communi centro H, ubi pondera ipsorum reciprocam servant rationem distantiarum à puncto suspensionis cum pondere corporis B. Et quia eodem prorsus argumento ostendetur, rectam AE subinde dividere in K rectam BD, ut BK sit ad DK, veluti est pondus corporis D ad pondus corporis B; & ut KE sit ad AE, veluti est pondus corporis A ad pondera corporum B, & D, servabitur etiam æquilibrium, quum corpora duo B, & D agunt in tertium A.

Non

Non dissimilis est ratio dubitandi in quatuor corporibus A, B, D, F. Etsi enim facile quisque concedat, servari æquilibrium, quotiescumque corpora tria A, B, D agunt in quartum F, quum tantam illa exerant actionem in locis suis, quantam si existerent in communi centro E, in quo pondera ipsorum cum pondere corporis F reciprocam servant rationem distantiarum à puncto suspensionis; attamen quod eadem corpora maneant æquilibrata, quum tria A, B, F, exempli gratiâ, agunt in quartum D; hoc quidem illud est, quod aliquid difficultatis involvit.

Verùm huic difficultati perspicuum est, facili quoque negotio occurri posse, si quemadmodum recta FG transit producta per punctum E, quod est commune centrum gravitatis corporum A, B, D; estque EG ad FG, ut pondus corporis F ad pondera corporum A, B, D: sic pariter ostendi possit, quod recta DG transeat producta per commune centrum gravitatis corporum A, B, F, quodque distantia ejus centri à puncto suspensionis G sit ad DG, ut est pondus corporis D ad pondera corporum A, B, F.

Hunc in finem jungamus rectam CF, cum qua conveniat DG in M. Et quoniam C est commune centrum gravitatis corporum A, & B; existeret in recta CF centrum

commune corporum A, B, F. Unde transibit recta DG producta per commune centrum gravitatis corporum A, B, F, siquidem ostendi possit, rectam CF subinde dividi in puncto M, ut CM sit ad FM, veluti est pondus corporis F ad pondera corporum A, & B.

Id autem ostendemus in hunc modum. Ducatur per punctum E recta EN ipsi DM parallela, quæ conveniat cum recta CF in puncto N. Et quoniam pondus corporis D est ad pondera corporum A, & B, ut CE ad DE; erit componendo, ut CD ad DE, hoc est ut CM ad MN, ita pondera corporum A, B, D ad pondera corporum A, & B. Jam autem pondus corporis F est ad pondera corporum A, B, D, ut EG ad FG, hoc est ut MN ad FM. Quare erit ex æquo perturbando, ut pondus corporis F ad pondera corporum A, & B, ita CM ad FM.

Est itaque punctum M commune centrum gravitatis corporum A, B, F. Quod verò MG sit ad DG, ut est pondus corporis D ad pondera corporum A, B, F, ostendemus quidem hac ratione. Ducatur per punctum M recta MO ipsi EF parallela, quæ conveniat cum CD in puncto O. Et quoniam pondus corporis F est ad pondera corporum A, & B, ut CM ad FM; erit componendo, ut CF ad FM, hoc est, ut CE ad EO, ita

ita pondera corporum A, B, F ad pondera corporum A, & B. Est autem ut DE ad CE, ita pondera corporum A, & B ad pondus corporis D. Quare erit ex æquo perturbando, ut DE ad EO, hoc est ut DG ad MG, ita pondera corporum A, B, F ad pondus corporis D.

Hinc servatur æquilibrium, etiam quum tria corpora A, B, F agunt in quartum D, quandoquidem tantam illa exercent actionem in locis suis, quantam si existerent in communi centro M, in quo eorum pondera servant reciprocam rationem distantiarum à puncto suspensionis cum pondere corporis B. Et quia eodem prorsus ratiocinio ostendetur servari æquilibrium, tum quum corpora B, D, F agunt in quartum A, tum in omni alio casu, qui fingi possit ac imaginari; consequens est, ut quatuor corpora A, B, D, F maneant inter se mutuò æquilibrata, quum conjunctis propriis ipsorum centris cum puncto G, omnia exinde suspenduntur.

Eâdem autem ratione demonstrabitur, fieri æquilibrium, quum corpora fuerint multo plura, quàm quatuor; ut hinc concludi possit generaliter, quod commune centrum gravitatis quocumque corporum per methodum superiùs traditam optimè definiatur, Illud hîc monendum existi-

ma-

mamus, quod si data corpora fuerint non in uno, eodemque plano, sed in diversis planis horizontalibus; reducenda sint prius ad idem planum, demittendo ex propriis eorum centris perpendiculara totidem ad planum illud, in quo commune velimus centrum gravitatis invenire, & considerando corpora velut existentia in locis illis, ubi eorum perpendiculara prædictum planum offendunt.

Jam commune istud centrum gravitatis duorum, aut plurium corporum varias habet proprietates, inter quas tres quidem sunt præcipuæ. Prima est, quod si per centrum illud agatur planum aliquod, pondera corporum, ad unam plani partem existentium, in suas ab eo distantias ducta, tantum efficiant, quantum pondera corporum, ad aliam plani partem collocatorum, ducta similiter in suas ab illo distantias.

Altera proprietas est, quod si corpora omnia fuerint ad eandem alicujus dati plani partem, facta ex ponderibus eorum in suas ab eo distantias æqualia sint ei, quod efficitur, si pondus unumquodque multiplicetur per distantiam communis centri gravitatis ab eodem plano.

Et denique tertia proprietas est, quod si corpora nonnulla fuerint ad unam alicujus dati plani partem, & corpora reliqua ad
par-

partem alteram ; differentia , quæ est inter facta ex ponderibus illorum in suas à plano distantias, & facta ex ponderibus istorum in suas similiter distantias ab illo plano , æqualis sit facta ex ponderibus corporum omnium in distantiam communis centri gravitatis ab eodem illo plano.

Verùm in omnibus hisce proprietatibus illud supponimus , ut unumquodque corpus reductum sit ad punctum illud , quod est centrum suæ gravitatis ; idque ea ratione, ut distantia ejus à plano, de quo agitur, sit perpendiculum, quod ex centro suæ gravitatis ducitur ad planum . Unde nisi hanc velimus hypothesim assumere , pro distantia corporis à plano illo , non alia erit intelligenda , quàm quæ à centro suæ gravitatis desumitur .

Ostendamus itaque primùm omnes hasce proprietates , quum commune centrum gravitatis ad duo tantùm corpora refertur. Sint ergo A, & B corpora duo, quorum commune gravitatis centrum sit punctum C. Transeat autem per centrum istud planum aliquod MN, ad quod ex propriis centris corporum A , & B demittantur perpendicula AM , BN . Dico id , quod fit , multiplicando pondus corporis A per AM , æquale esse ei, quod oritur , multiplicando pondus corporis B per BN.

FIG. 23.

Quo-

Quoniam enim C est centrum gravitatis corporum A , & B ; erit ut AC ad BC , ita pondus corporis B ad pondus corporis A . Sed propter triangula similia ACM , BCN , AC est ad BC , ut AM ad BN . Igitur erit ex æquali, ut pondus corporis B ad pondus corporis A , ita AM ad BN ; & propterea factum ex pondere corporis A in AM æquale erit ei, quod efficitur ex pondere corporis B in BN .

Sit secundò PQ planum alterum, respectu cuius existant ad eandem partem corpora A , & B . Demittantur ad planum istud tum ex propriis centris corporum A , & B perpendiculara AP , BQ , cum ex communi eorum centro C perpendicularum CR . Dico facta ex ponderibus corporum A , & B in sua respectivè perpendiculara AP , BQ æqualia esse ei, quod oritur, multiplicando corporis cujusque pondus per perpendicularum CR .

Ducatur enim per punctum C planum MN , æquidistans ipsi PQ , cum quo conveniant perpendiculara AP , BQ in punctis M , & N ; jamque propter æquales MP , CR , NQ , erunt facta tria, unum ex A in MP , alterum ex B in BN , & tertium ex B in BQ , æqualia ei, quod fit, multiplicando A , & B per CR . Ostensum est autem, factum ex B in BN æquale esse facto ex A in AM . Igitur facta tria, unum ex A in AM , alterum ex A in

in MP , & tertium ex B in BQ ; sive etiam facta duo unum ex A in AP , alterum ex B in BQ , æqualia erunt ei, quod efficitur, multiplicando A , & B per CR .

Sit denique ST planum tertium, subinde positum, ut corpus unum existat ad unam plani partem, corpus alterum ad partem aliam. Demittantur ad planum istud similiter, tam ex propriis centris corporum A , & B perpendiculara AS , BT , quàm ex communi eorum centro C perpendicularum CV . Dico, differentiam inter factum ex A in AS , & factum ex B in BT , æqualem esse ei, quod fit, multiplicando A , & B per CV .

Ducatur namque ad alteram corporum partem planum PQ æquidistans ipsi ST , cum quo conveniant perpendiculara omnia in punctis P , Q , R ; jamque si ex factis ex A in AP , & ex B in BQ subducantur facta ex A in SP , & ex B in TQ , remanebit differentia factorum ex A in AS , & ex B in BT . Sunt autem priora duo facta æqualia ei, quod fit ex A , & B in CR ; facta verò duo posteriora æqualia ei, quod efficitur ex A , & B in VR ; adeòque id, quod remanet subducendo ista ex iis, æquale est facto ex A , & B in CV . Itaque differentia factorum ex A in AS , & ex B in BT æqualis erit ei, quod fit, multiplicando A , & B per CV .

Sed ostendamus modò easdem proprietates,

FIG. 24. tes, quum commune centrum gravitatis ad tria corpora refertur. Sint igitur A, B, D corpora tria, quorum commune gravitatis centrum sit punctum E. Transeat autem per centrum istud planum aliquod MN, ad quod ex propriis centrīs corporum A, B, D demittantur perpendiculara AM, BN, DO. Dico pondera corporum A, & B, ad unam plani partem existentium, ducta in sua respectivè perpendiculara AM, BN, tantum efficere, quantum pondus solius corporis D, ad alteram plani partem existentis, ductum in perpendiculum suum DO.

Jungantur enim centra corporum A, & B per rectam AB, cum quo conveniat recta DE in C, ex quo demittatur ad planum perpendicularis CK. Et quoniam C est commune centrum gravitatis corporum A, & B; erunt facta duo, unum ex A in AM, alterum ex B in BN, æqualia ei, quod fit ex A, & B in CK. Jam verò, quum punctum E sit commune centrum corporum omnium, pondus corporis D est ad pondera corporum A, & B, ut CE ad DE, hoc est ut CK ad DO; adeòque factum ex A, & B in CK æquale est ei, quod fit ex D in DO. Igitur facta duo, unum ex A in AM, alterum ex B in BN, æqualia erunt soli facto ex D in DO.

Potest etiam in demonstratione adhiberi centrum gravitatis corporum A, & D, quod
est

est punctum H, in quo recta BE secatur rectam AD. Ducto siquidem ad planum perpendiculo HL, erit differentia factorum ex A in AM, & ex D in DO æqualis ei, quod fit ex A, & D in HL. Sed propter commune centrum corporum omnium id, quod fit ex A, & D in HL æquale est facto ex B in BN, Itaque differentia factorum ex A in AM, & ex D in DO æqualis erit facto ex B in BN; adeoque factum ex D in DO æquale erit duobus factis, uni ex A in AM, alteri ex B in BN.

Sit nunc PQ planum alterum, respectu cuius existant ad eandem partem corpora A, B, D. Demittantur ad planum istud, tam ex propriis centris eorum corporum perpendicula AP, BQ, DR, quàm ex communi eorundem centro E perpendiculum EI. Dico pondera corporum A, B, D ducta in sua respectivè perpendicula AP, BQ, DR tantum efficere, quantum si eadem pondera simul multiplicentur per perpendiculum EI.

Ducatur enim per punctum E planum MN, æquidistans ipsi PQ, cum quo convenient perpendicula AP, BQ, DR producta si opus in punctis M, N, O; jamque propter æquales MP, NQ, OR, EI erunt facta quatuor, unum ex A in MP, alterum ex B in NQ, tertium ex D in DR, quartum ex D in DO, æqualia ei, quod oritur,

tur, multiplicando $A, B, \& D$ per EI . Sed factum ex D in DO æquale est factis A in AM , & ex B in BN . Itaque erunt facta tria unum ex A in AP , alterum ex B in BQ , tertium ex D in DR , æqualia ei, quod fit ex $A, B, \& D$ in EI .

Denique fit ST planum tertium, respectu cuius existant corpora duo $A, \& B$ ad unam partem, corpus verò tertium D ad partem alteram. Ducantur similiter ad planum istud, tum ex propriis corporum centris perpendiculara AS, BT, DV , cum ex communi omnium centro E perpendicularum EX . Dico excessum, quo facta ex A in AS , & ex B in BT superant factum ex D in DV , æqualem esse ei, quod fit, multiplicando $A, B, \& D$ per EX .

Ducatur namque ad alteram corporum partem planum PQ , æquidistans ipsi ST , cum quo convenient perpendiculara omnia in punctis $P, Q, R, \& I$; jamque si ex factis ex A in AP , ex B in BQ , & ex D in DR subducantur facta ex A in SP , ex B in TQ , & ex D in VR , remanebit excessus, quo facta ex A in AS , & ex B in BT superant factum ex D in DV . Sed facta tria priora æqualia sunt ei, quod fit ex $A, B, \& D$ in EI , & facta tria posteriora æqualia sunt facto ex $A, B, \& D$ in XI ; adeoque id, quod remanet, subducendo secunda ex primis, est factum

Etum ex A, B, & D in EX. Igitur excessus, quo facta ex A in AS, & ex B in BT superant factum ex D in DV, æqualis erit ei, quod fit ex A, B, & D in EX.

Non dissimiliter easdem proprietates ostendemus, quum commune centrum gravitatis ad quatuor, aut plura corpora refertur; & omnino superfluum existimamus super hac re ulterius labores nostros extendere. Tantum notabimus, proprietatem primam in tertiâ contineri. Nam siquidem perpendiculum, quod ex communi centro gravitatis ducitur ad planum, de quo agitur in tertiâ proprietate, minuatur in infinitum, transibit planum illud per ipsum commune centrum, & factum ex ponderibus corporum omnium in perpendiculum illud evanescet. Unde quum evanescat etiam differentia inter facta ex ponderibus corporum ad unam plani partem existentium in suas ab illo plano distantias, & facta ex ponderibus corporum ad alteram plani partem collocatorum in suas similiter distantias ab eodem illo plano; fient facta prima æqualia secundis, adeoque tertia proprietas primam nobis restituet.

Cæterum si pondera corporum sint æqualia, quæ de productis ex ponderibus in suas respectivè distantias dicta sunt, vera erunt quoque de ipsis distantiis, quæ productis iis

proportione correspondent. Quocirca si planum transeat per commune centrum gravitatis, erunt distantiae corporum ad unam plani partem existentium æquales distantis corporum ad aliam plani partem collocatorum. Quod si verò corpora omnia fuerint ad eandem alicujus plani partem, erunt distantiae corporum omnium æquales distantiae communis centri gravitatis toties sumptæ, quotus est numerus corporum. Et denique si corpora nonnulla fuerint ad unam alicujus plani partem, & corpora reliqua ad partem alteram, erit differentia inter distantias illorum, & distantias istorum æqualis distantiae communis centri gravitatis toties etiam acceptæ, quot sunt corpora omnia.

C A P. III.

De methodo determinandi centrum gravitatis in figuris regularibus, ubi etiam de centro percussionis, & regulâ Guldini.

SEcunda proprietas, quam de communi centro gravitatis quocumque corporum superiori capite demonstratam attulimus: nimirum, quod si ad eandem alicujus plani partem existant corpora quocumque, pondera eorum, ducta in distantias suorum cen-

centrorum ab illo plano, tantum efficiant, quantum eadem pondera, ducta in distantiam communis centri gravitatis ab eodem illo plano; suppetit nobis duo præclara theoremata, quorum ope facile erit in figuris regularibus tam planis, quam solidis gravitatis centrum determinare.

Sit itaque primum CAC figura aliqua FIG. 25.
 plana regularis, ita ut omnes rectæ lineæ, quæ in ipsâ ordinantur, æquidistantes basi CC , secentur bifariam per diametrum AB . Concipiatur circa eandem diametrum AB descripta figura alia DAD talis naturæ, ut ductâ ex quolibet puncto diametri ordinatâ MNO , sit semper ut MN ad MO , ita recta aliqua magnitudine data AH ad abscissam utrique ordinatæ communem AM . Dico, quod si in eâdem diametro AB capiatur tale punctum S , ut figura CAC sit ad figuram DAD , quemadmodum est AH ad AS ; punctum S sit centrum gravitatis figuræ planæ CAC .

Per infinitas namque rectas lineas parallelas ipsi CC dividatur area totius figuræ CAC in infinitas areolas. Et quoniam omnes istæ areolæ considerari possunt velut totidem exigua parallelogramma, bisecta per diametrum AB ; erunt centra gravitatis omnium earum areolarum in ipsâ diametro AB ; nam id, velut naturali lumine notum,

ultra ab omnibus conceditur, centrum gravitatis figuræ parallelogrammæ in rectâ lineâ eam bisecante reperiri. Ex quo fit, ut ipsum totius figuræ CAC centrum, quod est centrum commune omnium illarum areolarum, existat in eâdem diametro AB .

Concipiamus porro per verticem figuræ A transire planum, cui insistant ad rectos angulos diameter AB ; jamque ob proprietatem illam initio hujus capituli memoratam, si figuræ CAC sit S centrum gravitatis, areolæ omnes illius figuræ, ductæ in distantias suorum centrorum ab illo plano, tantundem efficient, quantum figura tota CAC , ducta in AS . Unde quia figura CAC est æqualis figuræ DAD , ut AH ad AS , atque adeo factum ex figurâ CAC in AS æquale est ei, quod fit ex figurâ DAD in AH ; patebit punctum S esse centrum figuræ CAC , siquidem ostendi possit areolas omnes illius figuræ, ductas in distantias suorum centrorum à plano prædicto, tantundem efficere, quantum figura DAD , ducta in AH .

Id autem ostendemus in hunc modum. Sit $NQQN$ una ex areolis figuræ CAC , cui correspondeat in figurâ DAD areola $ORRO$. Et quoniam duæ istæ areolæ considerari possunt, velut parallelogramma duo, in iisdem parallelis constituta; erunt eæ inter se, quemadmodum sunt bases ipsarum NN ,
 OO ,

OO, five etiam ut basium semiffes MN, MO. Sed MN est ad MO, ut AH ad AM. Quare erit ex æquali, ut areola NQQN ad areolam ORRO, ita AH ad AM: & propterea quum AM sumi possit pro distantia centri gravitatis areolæ NQQN à plano per verticem transeunte, erit factum ex areolâ NQQN in prædictam sui centri distantiam à plano illo æquale ei, quod fit ex areolâ ORRO in rectam AH.

Eâdem ratione ostendetur, areolam quavis aliam figuræ CAC, ductam in distantiam sui centri ab eodem illo plano, tantundem efficere, quantum area correspondens figuræ DAD, ducta in rectam AH. Et igitur componendo areolæ omnes figuræ CAC, ductæ in distantias suorum centrorum à prædicto plano, tantundem efficient, quantum area tota figuræ DAD, ducta in rectam AH: adeoque, quia factum istud æquale est ei, quod fit ex figura CAC in rectam AS; erit recta ista AS distantia centri gravitatis figuræ CAC ab eodem prædicto plano, & propterea ipsum figuræ centrum erit punctum S.

Atque hoc quidem est theorema pro determinando centro gravitatis in figuris planis regularibus. Quantum ad figuras solidas regulares, assumatur rursus ut antea figura plana regularis CAC, circa cuius

I 2 dia^s

diametrum AB descripta concipiatur altera figura plana DAD talis naturæ, ut ductâ ex quolibet puncto diametri ordinatâ **MION**, sit semper, ut MN quadratum ad MO quadratum, ita recta quævis magnitudine data AH ad abscissam utrique ordinatæ communem AM. Dico, quod si in eâdem diametro AB capiatur tale punctum S, ut solidum descriptum ex revolutione figuræ CAC circa diametrum AB sit ad solidum descriptum ex revolutione figuræ DAD circa eandem diametrum AB, veluti est AH ad AS; punctum S sit centrum gravitatis solidi prioris.

Dividatur namque solidum illud per infinita plana æquidistantia plano basis in infinitas portiones, quas elementa ejus solidi appellabimus. Et quoniam omnia ista elementa considerari possunt, veluti totidem cylindruli descripti circa diametrum AB; erunt centra gravitatis omnium eorum elementorum in ipsâ diametro AB: nam id, tamquam naturali lumine notum, ultro ab omnibus admittitur, centrum gravitatis cujuscunque cylindri in axe ejus reperiri, utpote qui dispescit cylindrum ipsum in duas partes æquales. Ex quo fit, ut ipsum totius solidi centrum, quod est centrum commune omnium illorum elementorum, existat in eâdem diametro AB.

Concipiamus porro per verticem solidi A
transi-

transire planum, cui insistat ad rectos angulos diameter AB ; jamque si solidi, orti ex revolutione figuræ CAC , S sit centrum gravitatis, ob proprietatem illam initio hujus capitis memoratam, elementa omnia ejus solidi, ducta in distantias suorum centrorum ab illo plano, tantundem efficient, quantum solidum totum, ductum in AS . Unde quia solidum ortum ex revolutione figuræ CAC est ad solidum ortum ex revolutione figuræ DAD , ut AH ad AS ; atque adeò factum ex solido priori in AS æquale est ei, quod fit ex solido altero in AH : patebit punctum S esse centrum gravitatis solidi orti ex revolutione figuræ CAC , siquidem ostendi possit, omnia hujus solidi elementa, ducta in distantias suorum centrorum à plano prædicto, tantundem efficere, quantum solidum ortum ex revolutione figuræ DAD , ductum in AH .

Id autem ostendemus in hunc modum. Sit figuræ CAC areola quævis $NQQN$, cui correspondeat in figurâ DAD areola $ORRO$. Et quoniam elementa solidorum, quæ à duabus hisce areolis describuntur, considerari possunt, velut cylindruli duo in iisdem parallelis constituti; erunt elementa illa, ut quadrata rectarum NN , OO , sive etiam ut quadrata semissium MN , MO . Est autem, ut MN quadratum ad MO quadratum, ita AH ad AM . Quare erit ex æquali, ut ele-

mentum descriptum ab areolâ $NQQN$ ad elementum descriptum ab areolâ $ORRO$, ita AH ad AM ; & propterea, quia AM sumi potest pro distantia centri gravitatis prioris elementi à plano per verticem transeunte, erit factum ex elemento illo in prædictam sui centri distantiam æquale ei, quod fit ex elemento altero in rectam AH .

Eâdem ratione ostendetur, elementum quodvis aliud solidi orti ex revolutione figuræ CAC , ductum in distantiam sui centri ab eodem illo plano, tantundem efficere, quantum correspondens elementum solidi orti ex revolutione figuræ DAD , ductum in rectam AH . Et igitur componendo elementa omnia solidi prioris, ducta in distantias suorum centrorum à prædicto plano, tantundem efficient, quantum solidum alterum ductum in rectam AH : adeoque quia factum istud æquale est ei, quod fit ex solido priori in rectam AS ; erit recta ista AS distantia centri gravitatis solidi orti ex revolutione figuræ CAC ab eodem prædicto plano; & propterea ipsum illius solidi centrum erit punctum S .

In utroque hoc theoremate, supposuimus figuras, de quibus agitur, esse ejusdem ubique densitatis: idque ea ratione, ut ponderatum ipsarum, tum suorum elementorum per suas respectivè magnitudines possent de-

definiri. Sed si non eadem sit densitas in singulis elementis figuræ propositæ, oportebit illam in aliam transmutare, cujus elementa singula eandem densitatem habentia sint ejusdem ponderis cum singulis elementis illius. Nam si alia ista figura descripta concipiatur circa eandem diametrum AB , habebit ea cum figurâ propositâ idem centrum gravitatis, quum idem sit pondus in singulis elementis utriusque; adeoque iisdem illis theorematibus determinabitur centrum gravitatis figuræ propositæ, siquidem in determinatione loco ejus aliam istam figuram usurpemus.

Hanc porro figuram ex datâ variatione densitatis facili negotio obtinebimus. Detur etenim primò figura plana CAC , cujus ordinatæ, sive potius areolæ diversas habeant densitates. Sit $ABEF$ scala densitatis, hoc est figura, quæ ordinatis suis MK designet diversas densitates ordinatarum MN figuræ propositæ. Concipiatur circa diametrum AB descripta figura alia DAD , in qua unaquæque ordinata MO obtineat densitatem designatam per datam rectam AH , habeatque talem longitudinem, ut MN sit ad ipsam MO , veluti est AH ad MK . Dico areolas singulas hujus figuræ idem pondus habere cum singulis areolis figuræ propositæ CAC ; adeoque idem esse centrum gravita-

vitatis utriusque figuræ.

Capiatur enim in figurâ CAC areola quævis $NQQN$, cui correspondeat in figurâ DAD areola $ORRO$. Et quoniam AH designat densitatem ordinatæ MO , sive potius areolæ $ORRO$, & MK densitatē ordinatæ MN , sive etiam areolæ $NQQN$; erit ut AH ad MK , ita densitas areolæ $ORRO$ ad densitatem areolæ $NQQN$. Sed AH est ad MK , ut MN ad MO , hoc est ut areola $NQQN$ ad areolam $ORRO$. Itaque duæ istæ areolæ erunt inter se in reciprocâ suarum densitatum ratione; & propterea idem erit pondus utriusque. Eâdem ratione ostendetur, areolam quamvis aliam figuræ CAC tantundem ponderare, quantum areola correspondens figuræ DAD . Unde sequitur, idem esse centrum gravitatis utriusque figuræ.

Detur secundò solidum ortum ex revolutione figuræ planæ CAC circa diametrum AB , sitque adhuc $ABEF$ scala densitatis. Concipiatur circa diametrum AB descripta altera figura plana DAD , in qua unaquæque ordinata MO obtineat densitatem designatam per rectam magnitudine datam AH , & habeat talem longitudinem, ut quadratum ex MN sit ad quadratum ex ipsâ MO , veluti est AH ad MK . Dico elementa singula solidi orti ex revolutione alterius hujus figuræ idem pondus habere cum singulis ele-
men-

mentis solidi dati, atque adeò idem esse centrum gravitatis utriusque solidi.

Quoniam enim AH designat densitatem areolæ $ORRO$, designabit eadem AH densitatem elementi, quod in revolutione figuræ DAD ab areolâ illâ describitur. Et similiter, quia MK denotat densitatem areolæ $NQQN$, denotabit eadem MK densitatem elementi, quod in revolutione figuræ CAC areola illa describit. Quare densitas prioris elementi erit ad densitatem alterius, ut AH ad MK . Sed AH est ad MK , ut MN quadratum ad MO quadratum, hoc est ut elementum descriptum ab areolâ $NQQN$ ad elementum descriptum ab areolâ $ORRO$. Itaque duo ista elementa erunt inter se in reciproca suarum densitatum ratione; & propterea idem erit pondus utriusque. Eodem argumento ostendetur, elementum quodvis aliud solidi orti ex revolutione figuræ CAC tantundem ponderare, quantum correspondens elementum solidi orti ex revolutione figuræ DAD . Unde sequitur, idem esse centrum gravitatis utriusque solidi.

Hoc eodem artificio determinari quoque potest centrum, quod vocant percussionis, quum figuræ percutientis elementa omnia non eadem velocitate moveri supponuntur, nec proinde momenta ipsorum ponderibus suis proportionem correspondent: mi-

mirum transmutando eam in aliam, cujus elementa singula eâdem velocitate lata idem habeant momentum cum singulis elementis figuræ propositæ. Quod equidem quum fit, jam quæstio de inveniendo centro percussionis edò reducetur, ut novæ istius figuræ, circa eandem cum illâ diametrum descriptæ, gravitatis centrum inveniatur; nam quotiescumque figura subinde moveri supponitur, ut ejus elementa omnia eâdem velocitate ferantur, centrum gravitatis, & centrum percussionis in eâ confunduntur.

Vocant siquidem Mechanici in figurâ, quæ movetur, centrum percussionis punctum illud, in quo omne ejus momentum colligitur, & coacervatur, quodq; proinde tale est, ut si eo figura alicui occurreret obstaculo, magis illud percuteret, quàm si alio quovis puncto in idem obstaculum impingeret. Ex quo patet, punctum istud ita quidem in figurâ situm esse debere, ut momenta omnium elementorum ad unam ejus partem existentium, æquilibrentur in puncto illo cum momentis elementorum, quæ ad partem alteram consistunt. Unde, quia momenta tam illorum, quàm istorum ponderibus suis proportionem correspondent, quotiescumque figura subinde ponitur moveri, ut singula ejus elementa eâdem ferantur velocitate, æquilibrabuntur in hoc casu pondera
ele.

elementorum ad unam partem existentium cum ponderibus elementorum ad partem alteram collocatorum, & propterea centrum percussionis idem erit cum centro gravitatis.

Sed nō perinde res est, quum singula figuræ elementa diversis feruntur velocitatibus. Tunc enim momentum cujusque elementi est, ut pondus, & velocitas conjunctim; proindeque, non quidem pondera elementorum, hinc inde à centro percussionis existentium, sed facta ex iis ponderibus in suas respectivè velocitates debent in puncto illo inter se mutuò æquilibrari. Unde necesse est, ut centrum percussionis removeatur nonnihil à centro gravitatis, & inter ea collocetur elementa, quæ majori velocitate urgentur; ut scilicet illa, quibus minor inest velocitas, majorem ab eo distantiam hebeant, & consequenter majorem velocitatem relativam acquirant. Ex quo colligi potest, distantiam inter centrum gravitatis, & centrum percussionis eò debere esse majorem, quo magis differunt à se mutuò velocitates, quibus figuræ elementa feruntur.

Hac ratione si recta linea AB parallelo motu agatur, quia omnia ejus elementa eadem velocitate feruntur, erit in eâ centrum percussionis idem, ac centrum gravitatis: proindeque utrumque existet in medio ipsius

FIG. 26.

fius rectæ lineæ AB , si eadem ubique sit densitas. Sed si ponamus, rectam AB circa punctum A circulariter moveri, tunc centrum percussionis erit in tali puncto C , ut portio AC sit dupla reliquæ CB . Nam si circa ipsam AB descriptum concipiamus triangulum æquicruræ DAD , momenta, quæ habent singula elementa rectæ AB , erunt inter se, ut correspondentes areolæ hujus trianguli; adeoque, quemadmodum omnes istæ areolæ æquilibrantur in puncto C , quod est earum commune centrum gravitatis, ita & in eodem puncto C momenta eorum elementorum manebunt æquilibrata.

Itaque, ubi figuræ diameter motu fertur parallelo, quia omnia ejus elementa eadem urgentur velocitate, inveniendū centrum gravitatis, invenitur etiam centrum percussionis, quum duo ista centra simul confundantur, nec unum ab altero differat. Sed quotiescumque figuræ elementa diversis feruntur velocitatibus: (id, quod contingit, quum diameter figuræ circa datum aliquod punctum circulariter movetur,) inveniri poterit centrum percussionis, transmutando eam in aliam, cujus elementa singula eadem velocitate lata, idem habeant momentum cum singulis elementis illius. Nam si quidem hæc altera figura descripta concipiat^rur circa eandem diametrum, habebit ea
idem

idem centrum percussionis cum figurâ propositâ ; adeoque inveniendò ejus centrum gravitatis, habebitur centrum percussionis utriusque figuræ.

Hanc aliam verò figuram facili negotio obtinebimus, quum notæ sunt diversæ velocitates, quibus propositæ figuræ elementa feruntur; nimirum eodem illo artificio, quo ex datis diversis densitatibus, quas habent figuræ alicujus elementa, invenitur figura alia, cujus elementa eandem densitatem habentia sint ejusdem ponderis cum elementis illius; nam quemadmodum pondus ex magnitudine, & densitate desumitur, sic momentum ex pondere, & velocitate est repetendum. Tantùm notabimus, scalam velocitatis, hoc est figuram, quæ ordinatis suis correspondentibus designat diversas velocitates elementorum datæ figuræ, rectâ lineâ semper terminari; quandoquidem diversæ illæ velocitates non aliunde oriuntur, quàm quia diameter figuræ datæ circa punctum aliquod circulariter movetur; unde etiam necesse est, ut recta linea terminans scalam velocitatis transeat semper per centrum motus circularis.

Ex eâdem illâ proprietate, initio hujus capitis memoratâ, profluit etiam prono alveo regula Guldini, quod figurâ, quæ oritur ex revolutione cujuslibet magnitudinis cir-

circa aliquam rectam positione datam æqualis sit factum ex magnitudine genitrice in viam sui centri gravitatis. Nam divisâ magnitudine istâ per suas ad axem rotationis ordinatas in innumera elementa; erunt facta ex omnibus hisce elementis in distantias suorum centrorum ab axe illo æqualia ei, quod fit ex magnitudine totâ in distantiam sui centri ab eodem axe: adeòque, quia distantia cujusque centri ab axe rotationis est, ut via, per quam fertur centrum illud; erunt facta ex iisdem elementis in vias suorum centrorum æqualia ei, quod fit ex magnitudine totâ in viam proprii sui centri. Jam verò, quum centrum cujusque elementi in medio ejus reperiatur, facta illa dant elementa figuræ genitæ, atque adeò omnia simul ipsam figuram genitam adæquant. Itaque factum ex magnitudine genitrice in viam sui centri gravitatis æqualis erit figuræ genitæ.

Hæc regula Guldini locum sibi vindicat tantum, quum magnitudo genitrix est ejusdem ubique densitatis. Sed eadem obtinet non solum in figuris rotatione genitis, verum etiam in iis, quæ alio quovis motu generantur, dummodo motus tali lege fiat, ut magnitudo genitrix insistant semper ad rectos angulos super lineâ, quam gravitatis suæ centrum motu illo describit. Sit enim **CD**

linea descripta à centro gravitatis in motu magnitudinis AB eâ lege factò . Capiatur in eâ portio indefinitè parva CE , sitque FG situs magnitudinis , dum centrum gravitatis reperitur in E, & convenient AB, FG in puncto H. Itaque, propter legem motus suppositam, portio curvæ CE considerari potest, velut arcus circuli descriptus ex puncto H tamquam centro ; adeoque , quia magnitudo AB rotatur circa punctum H , dum ejus centrum describit portionem CE , figura interea temporis genita æquabitur factò ex AB in CE . Eodem argumento ostendemus, figuram , quæ generatur , dum describitur portio subsequens indefinitè parva EI, æquari factò ex AB in EI. Et igitur componendo, figura genita incessu per totam curvam CD æquabitur factò ex AB in CD , hoc est ex magnitudine genitrice in viam sui centri gravitatis.

FIG. 27.

C A P. IV.

De æquilibrio potentiarum , unum idemque corpus trahentium, & de mediis earundem directionibus .

Accidit interdum , ut unum , idemque corpus à pluribus potentiis trahatur, quæ ita disponi possunt , ut maneant inter se mutuò æquilibratæ, nec ulla secum corpus

pus adducat. Jam quocumque fuerint potentia corpus trahentes, ut legem æquilibrium inveniamus, illud primò statui debet, quod ubi corpus duabus tantum trahitur potentiis, nequeat fieri inter eas æquilibrium, nisi ipsæ sint æquales, & earum directiones omnino contrariæ. Neque enim possunt directiones potentiæ angulum constituere; quia sic corpus, in quo nullam in hoc casu resistantiam consideramus, moveretur per diagonalem parallelogrammi, cujus latera directiones, & vires potentiæ designant. Neque etiam potentia ipsæ possunt esse inæquales inter se; quia sic major minorem vinceret, & secum corpus adduceret.

FIG. 28. Ponamus modò corpus A à tribus potentiis trahi, quarum directiones, & quantitates designentur per rectas AB, AC, AD. Et quoniam, completo parallelogrammo ABCE, corpus perinde trahitur à potentiis AB, AC, ac si traheretur à potentiâ, designatâ per diagonalem AE; æquilibrabitur potentia AD cum ipsis AB, AC, siquidem servare possit æquilibrium cum potentiâ AE. Sed duæ istæ potentia AD, AE nequeunt manere inter se mutuò æquilibratæ, nisi ipsæ sint æquales, & earum directiones omnino contrariæ. Itaque potentia designata per rectam AD æquilibrabitur cum aliis duabus

potentiis, quas referunt rectæ AB , AC , si completo parallelogrammo $ABEC$ pergat AD producta ad punctum E , & fiat AE æqualis ipsi AD .

Eâdem igitur ratione potentia AC æquilibrabitur cum duabus aliis AB , AD , si completo parallelogrammo $ABFD$ pergat AC producta ad punctum F , & fiat AF æqualis ipsi AC . Atque ita quoque potentia AB æquilibrata manebit cum duabus aliis AC , AD , si completo parallelogrammo $ACGD$ pergat AB producta ad punctum G , & fiat AG æqualis ipsi AB . Verum facile erit ostendere, æquilibrium inter potentias mutuum esse debere, quotiescumque potentia una, velut AD , æquilibratur cum duabus aliis AB , AC ; nam semper ac AD producta pergit ad E , & fit AE æqualis AD , necesse est, ut similiter aliæ duæ AC , AB productæ pergant ad F , & G , & fiant AF , AG æquales ipsis AC , AB .

Atque hinc modò patet ratio ejus theoremat̃is, quod sine demonstratione Torricellio proposuit Robervallius: nimirum, quod si tres potentiæ AB , AC , AD trahentes punctum A consistent in æquilibrio, punctum illud sit centrum gravitatis trianguli BCD . Nam, quum ratione æquilibrii AD producta pergat ad E , bisecabit ea latus trianguli BC , adedque in ipsâ erit centrum gravitatis.

Similiter, quia propter æquilibrium AC producta pergit ad F, ea bisecabit latus trianguli BD, atque adeo ipsa quoque transibit per centrum gravitatis. Unde necesse est, ut centrum gravitatis sit punctum A, quod à potentiis trahitur, utpote commune utrique ipsarum DE, CF.

Patet etiam veritas theorematis illius, cui totam fermè mechanicam suam superextruxit Petrus Varignonius: scilicet quod si tres potentiae AB, AC, AD in unum, idemque corpus agentes maneant æquilibratae, unaquæque sit, ut sinus anguli sub aliarum directionibus contenti. Nam completo parallelogrammo ABEC, quia AC est æqualis BE, & angulus CAE æqualis est angulo BEA; erit ut AB ad AC, ita sinus anguli CAE ad sinum anguli BAE. Sed, quum AD producta pergat ad E, sinus angulorum CAE, BAE iidem sunt, ac sinus angulorum CAD, BAD. Quare erit, ut AB ad AC, ita sinus anguli CAD ad sinum anguli BAD. Eadem ratione ostendemus, AC esse ad AD, ut est sinus anguli BAD ad sinum anguli BAC; & AD esse ad AB, ut est sinus anguli BAC ad sinum anguli CAD. Itaque in casu æquilibrii unaquæque potentia erit, ut sinus anguli sub aliarum directionibus contenti.

Patet demum, quod si tres potentiae AB, AC,

AC , AD trahentes punctum A consistent in æquilibrio, & punctis B , C , D , quibus terminantur rectæ lineæ potentias illas designantes, ponantur tria pondera æqualia B , C , D ; commune centrum gravitatis eorum ponderum sit ipsum punctum A . Nam, quum recta AD producta pergat ad E , ea distantiam ponderum B , & C secabit bifariam in H ; adeoque erit ut pondus B ad pondus C , ita CH ad BH . Et quoniam AE secatur quoque bifariam in H ; erit AE , sive AD dupla ipsius AH ; proindeque pondera B , & C simul erunt ad pondus tertium D , ut AD ad AH . Unde ex methodo superius tradita de inveniando communi centro gravitatis quocumque corporum, erit punctum A commune centrum gravitatis trium ponderum æqualium B , C , D .

Ex quibus modò tres nobis derivantur canones, pro indagando mutuo æquilibrio trium potentiarum AB , AC , AD trahentium unum idemque corpus A , quod velut punctum omnis expertus resistentiæ consideramus. Primò nempe si punctum A sit centrum gravitatis trianguli BCD , quod constituunt rectæ lineæ BC , CD , DB ductæ per extremitates earum, quæ potentias ipsas designant. Secundò si quælibet potentia sit, ut sinus anguli, quem aliarum directiones comprehendunt. Et denique si idem punctum

A sit commune centrum gravitatis trium ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, per quas potentiaë illæ designantur.

Verùm ex his omnibus tertius dumtaxat, five postremus peculiarem meretur contemplationem, quippe qui locum sibi vindicat, quotcumque fuerint potentiaë corpus trahentes. Est enim in hac re theorema quidem generale, ut plures potentiaë, quæ unum, idemque punctum trahunt, nequeant esse in æquilibrio, nisi punctum illud sit commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, quæ potentias illas designant; nec equidem aliam hujus æquilibrii legem, five simpliciore, five universaliorē dari posse existimamus, quàm quæ hoc theoremate continetur.

Potest autem veritas hujus theorematis suaderi, ostendendo, quod quotiescumque punctum, quod trahitur, est commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, per quas potentiaë designantur, unaquæque potentia sit æqualis, & contraria ei, quæ oritur ex aliarum omnium compositione. Hinc enim perspicuum fiet, perinde esse, si punctum trahatur ab omnibus iis potentis, ac si traheretur à duabus tantum æqualibus,

libus, & contrariis; adeoque quemadmodum in hoc casu punctum manet immotum, ita etiam manebit immotum in casu primo, atque adeo potentiae illud trahentes erunt in æquilibrio.

Trahatur itaque punctum A à potentiis FIG. 29
 quotcumque, quarum vires, & directiones designent rectæ AB, AC, AD, AE, AF, &c., sitque punctum illud commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium B, C, D, E, F, existentium in extremitatibus rectarum, quæ illas referunt potentias. Producaturs una ipsarum, velut AB, in directum versus A; & quia A est commune centrum gravitatis ponderum omnium B, C, D, E, F, transibit illa per punctum G, commune centrum gravitatis ponderum aliorum C, D, E, F; eritque, ut pondus B ad pondera reliqua C, D, E, F, hoc est, propter æqualitatem ponderum, ut unitas ad numerum ponderum omnium unitate multatum, ita AG ad AB; & propterea si AG per hunc numerum multiplicetur, eadem ipsi AB æqualis orietur.

Sic AH tale multiplex ipsius AG; jamque si ostendi possit, omnes alias potentias AC, AD, AE, AF componere simul potentiam designatam per AH, liquidò patebit, potentiam AB esse æqualem, & contrariam ei, quæ ex aliarum omnium compositione na-

scitur. Id autem ostendemus in hunc modum. Ducatur per punctum A, utcumque planum LN, ad quod ex punctis C, D, E, F, G demittantur perpendiculara CI, DL, EM, FN, GO, & resolvatur unaquæque potentiarum AC, AD, AE, AF in duas alias, unam ducto plano perpendiculararem, alteram eidem parallelam; eruntque CI, DL, EM, FN omnes potentiae perpendicularares, & AI, AL, AM, AN omnes potentiae parallelæ.

Quia igitur potentiae obliquæ AC, AD, AE, AF æquipollent perpendicularibus CI, DL, EM, FN, & parallelis AI, AL, AM, AN; æquipollebit potentia ex iis composita similiter duabus aliis, quarum una oritur ex compositione potentiarum perpendiculararium, altera ex compositione potentiarum parallelarum. Jam verò potentia, quæ oritur ex perpendicularibus, est excessus, quo DL, EM, FN ad unam partem existentes superant CI, quæ existit ad partem alteram; & similiter potentia, quæ nascitur ex parallelis, est excessus, quo AI, AL tendentes ad partem unam superant AM, AN, quæ diriguntur ad plagam oppositam. Quare potentia composita ex obliquis AC, AD, AE, AF æquipollebit duabus aliis, quarum una designatur per excessum, quo DL, EM, FN superant CI, altera per excessum, quo AI, AL
su-

superant AM, AN .

Et quoniam punctum G est commune centrum gravitatis ponderum æqualium C, D, E, F ; per ea, quæ superius ostensa sunt de communi quocumque ponderum centro gravitatis, erit tum excessus, quo DL, EM, FN superant CI , æqualis GO toties sumptæ quotus est numerus ponderum, tum excessus, quo AI, AL superant AM, AN æqualis AO toties etiam acceptæ, quot sunt eadem pondera. Sed demisso ex puncto H ad idem planum perpendiculo HR , hæc ipsarum GO, AO æque multiplicia sunt rectæ HR, AR ; quum AH tale etiam sit multiplex ipsius AG . Itaque erit HR excessus, quo DL, EM, FN superant CI , & AR excessus, quo AL, AI superant AM, AN : proindeque potentia, quæ componitur ex obliquis AC, AD, AE, AF æquivalet potentiiis HR, AR ; adeoque designabitur per ipsam AH .

Quum itaque potentia AC, AD, AE, AF componant simul potentiam designatam per AH , erit potentia AB æqualis, & contraria ei, quæ ex illarum omnium nascitur compositione. Eodem argumento ostendetur, quamvis aliam ex iisdem potentiis esse æqualem, & contrariam ei, quam omnes alia simul componunt. Et igitur perinde erit, quum punctum A trahitur à potentiis

tiis AB, AC, AD, AE, AF, ac si traheretur à duabus tantum potentiis æqualibus, & contrariis: Unde consequens est, ut punctum illud maneat immotum, atque adeo ut ipsæ potentiæ æquilibrentur inter se mutuo.

Atque hinc modò patet ratio alterius theorematis, quod Torricellio proposuit Robervalius: nimirum, quod si punctum aliquod trahatur à quatuor potentiis, in eodem plano non existentibus, quæ consistant in æquilibrio, punctum illud sit centrum gravitatis pyramidis ejus, cujus angulis terminantur rectæ lineæ, per quas potentiæ illæ designantur. Nam quemadmodum centrum gravitatis cujusque trianguli idem est cum communi centro gravitatis trium ponderum æqualium, in trianguli angulis existentium; ita centrum gravitatis cujusque pyramidis triangularis confunditur cum communi centro gravitatis quatuor ponderum æqualium, quæ in angulis illius pyramidis existunt.

Ex ipsâ autem generalis ejus theorematis demonstratione pulcherrima nobis nascitur methodus, potentias quocumque componendi, quæ unum, idemque corpus trahunt, & determinandi mediam earundem directionem, hoc est lineam, secundum quam agere debet in corpus potentia ex omnibus com-

po-

posita, quo idem pariat effectum. Trahatur etenim corpus A, quod velut punctum FIG. 29. omnis resistentiæ expers consideramus, à potentiis AC, AD, AE, AF; & determinanda sit tum potentia, quæ ex earum omnium compositione nascitur, tum media earundem directio.

Extremitatibus rectarum, per quas potentiæ illæ designantur, ponantur totidem pondera æqualia C, D, E, F. Horum omnium ponderum inveniatur commune centrum gravitatis, & sit punctum G. Jungatur recta AG, cujus tam multiplex constituatur AH, quotus est numerus ponderum, siue ipsarum potentiarum. Dico, rectam istam AH designare tam potentiam, quæ oritur ex compositione ipsarum AC, AD, AE, AF, quàm mediam earundem directionem, siue lineam, secundum quam agere debet in corpus potentia composita, quod eundem producat effectum.

Ipsi enim AH æqualis, & in directum constituatur AB, cujus extremitati ponatur pondus B æquale cuilibet ipsorum C, D, E, F. Et quoniam AG est ad AH, siue AB, ut unitas ad numerum ponderum C, D, E, F; erit etiam, ut AG ad AB, ita pondus B ad pondera C, D, E, F: & idcirco quum punctum A sit commune centrum gravitatis ponderum æqualiū B, C, D, E, F; per ostensum
theo-

theoremata, si punctum illud trahatur à potentiis AB, AC, AD, AE, AF , manebit idem immotum, & ipsæ potentiae erunt in æquilibrio. Unde, quum potentia AB æquilibretur cum aliis AC, AD, AE, AF ; quæ ex istis componitur, ei æqualis erit, & contraria: adeoque, quia ipsi AB æqualis est, & contraria AH , designabit AH tum potentiam, quæ oritur ex compositione ipsarum AC, AD, AE, AF , tum mediam earundem directionem.

Quod si commune centrum gravitatis ponderum æqualium C, D, E, F incidat in ipsum punctum A ; tunc evanescente AG , evanescet etiam AH , quæ est multiplex ipsius AG secundum multitudinem ponderum; adeoque tam potentia, quæ componitur ex ipsis AC, AD, AE, AF nulla fiet, quàm media earundem directio nulli reperietur. Id verò mirum esse non debet. Nam quotiescumque punctum A est commune centrum gravitatis ponderum æqualium C, D, E, F ; per ostensum theoremata servabitur æquilibrio inter potentias AC, AD, AE, AF , à quibus trahitur punctum illud: proindeque se mutuo destruentes, perinde erit, ac si nequaquam puncto A essent applicatæ.

Huc usque consideravimus corpus, quod à potentiis trahitur, tamquam merum punctum:

ctum : idque ea ratione , ut potentia omnes corpus trahentes uni , eidemque corporis puncto essent applicatae . Sed videamus modò quid sit futurum , quum potentia , per quas corpus trahitur , diversis corporis punctis applicantur . Quem in finem referat AB corpus aliquod inflexile , omnisque expers resistentiae , cui ad puncta diversa applicantur primum potentia duae AC , BD , quae illud secum versus eandem partem trahere conentur. FIG. 30.

Producantur AC , BD usque donec conveniant in E . Et quoniam corpus AB supponitur inflexile , omnisque expers resistentiae , exercebunt potentia AC , BD eandem vim in trahendo corpore illo , ac si traherent punctum E , cui secundum easdem directiones sunt applicatae . Quocirca si EG sit media directio illarum potentiarum , dum trahunt punctum E , & FG potentia ex iis composita ; designabit eadem FG , tum potentiam , quam componunt , dum trahunt corpus AB , tum mediam earundem directionem : & propterea si ipsi FG aequalis , & in directum constituatur FH , potentia designata per rectam istam FH aequilibrabitur cum ipsis AC , BD .

Eadem ratione , si potentia diversis corporis punctis applicatae , illudque ad eandem partem trahentes , sint plures , quàm
duae,

duæ, eæque convergant omnes ad unum, idemque punctum; determinabitur, tum potentia, quæ ex omnibus resultat, tum media earundem directio, considerando quoque potentias illas velut trahentes punctum, ad quod omnes convergunt. Nec dissimiliter fiet, si nequaquam ad unum, idemque punctum omnes illæ potentia convergant; nam poterit per diversas operationes id, quod quæritur, obtineri; nimirum primò componendo potentias duas; deinde eam, quæ ex iis resultat, cum tertiâ; tum hinc ortam cum quartâ; atque ita deinceps.

Sed unicâ tantùm operatione etiam in hoc casu licebit determinare, tum potentiam, quæ ex omnium compositione oritur, tum mediam earundem directionem; nimirum resolvendo ipsarum unamquamque in duas alias, quarum una convergat ad datum punctum, altera alicui datæ rectæ lineæ sit parallela; & componendo deinceps in unum tam convergentes ad punctum datum, quàm quæ datæ rectæ lineæ sunt parallelæ. Quod

FIG. 31. ut liquidò constet, referat rursus AB corpus aliquod inflexile, & omnis expers resistentiæ, cui ad puncta diversa applicentur quatuor potentia AE, CE, DE, BE, quarum unaquæque illud secum trahere conetur.

Capiatur ad alteram partem ipsius AB punctum aliquod K, quod jungatur cum
pun-

punctis A, C, D, B per totidem rectas lineas AK, CK, DK, BK. Ducantur per puncta E terminos rectarum, quæ potentias designant, rectæ lineæ EF parallelæ ipsi AB, quæ cum illis conveniant in F; jamque si quælibet potentiarum AE, CE, DE, BE resolvatur in suas laterales, æquipollebunt iis octo potentia, quatuor quidem AF, CF, DF, BF convergentes ad unum, idemque punctum K, & quatuor aliæ designatæ per rectas punctis E, & F interceptas, quæ eidem AB sunt parallelæ.

Et quoniam potentia AF, CF, DF, BF convergunt omnes ad punctum K, considerando eas tamquam trahentes punctum illud, facili negotio invenietur, tum media earum directio KI, tum potentia, quæ ex iisdem resultat HI. Sed potentia designatæ per rectas EF, quum sint omnes parallelæ, componunt simul potentiam IL, quæ agens secundum eandem directionem est æqualis differentia inter IM, summam earum, quæ ab F ad E tendunt ad dextram, & ML summam illarum, quæ vicissim ab F ad E tendunt ad sinistram. Quare erit HL tum media directio potentiarum AE, CE, DE, BE, à quibus trahitur corpus AB, tum potentia, quæ in mediâ illâ directione iis omnibus æquivalet; & propterea si ipsi HL æqualis, & in directum constituatur HN, potentia

de

designata per HN æquilibrabitur, cum ipsis
 AE, CE, DE, BE.

Atque hinc modò si consideremus AB
 tamquam vectem, sive lineam inflexilem,
 quæ trahatur à potentiis AE, CE, DE,
 BE, aut etiam à potentiis AF, CF, DF, BF;
 fiet æquilibrium inter potentias illas, si hy-
 pomochlion ponatur in H, cui applicanda
 est potentia, quæ iis omnibus æquipolleat.
 Ex quo facile erit ostendere, quod si vectis
 à pluribus potentiis trahatur, nequeant eæ
 consistere in æquilibrio, nisi potentia, quæ
 sunt ad unam partem hypomochlii, ductæ
 in suas ab hypomochlio distantias, tantun-
 dem efficient, quantum potentia existentes
 ad partem alteram, ductæ similiter in suas
 distantias ab eodem hypomochlio.

Ponamus etenim primò, potentias, quæ
 vecti AB applicatæ, æquilibrantur in H, esse
 AF, CF, DF, BF, quarum unaquæque
 convergit ad punctum K. Itaque, quia HK
 est media directio earum potentiarum, si eæ-
 dem transferantur super rectis KA, KC, KD,
 KB, ita ut incipientes à K terminentur pun-
 ctis *a*, *c*, *d*, *b*; erit in lineâ KH commune
 centrum gravitatis quatuor ponderum æ-
 qualium iis in punctis existentium; adeo-
 que per ea, quæ de communi quocumque
 ponderum centro gravitatis ostensa sunt,
 erunt distantia punctorum *a*, & *c* à rectâ
 KH

KH æquales distantis punctorum d , & b ab eadem KH .

Jam distantia ista sunt inter se, ut rectangula, quæ sunt ex ipsis in communem altitudinem KH . Quocirca, quia rectangula ista æqualia sunt iis, quæ sunt ex rectis Ka , Kc , Kd , Kb in suas respectivè distantias à puncto H , hoc est ex potentiis AF , CF , DF , BF in perpendiculara HN , HO , HP , HQ , quæ super earum directionibus protractis ex puncto H demittuntur; erunt rectangula ex potentiis AF , CF in perpendiculara HN , HO super ipsis demissa ex puncto H , æqualia rectangulis, quæ sunt ex potentiis DF , BF in perpendiculara HP , HQ , quæ demittuntur super iis similiter ex puncto H : & propterea potentia AF , CF , ad unam hypomochlii partem existentes, ductæ in suas ab hypomochlio distantias HN , HO , tantundem efficiunt, quantum potentia DF , BF , quæ existunt ad alteram partem hypomochlii, ductæ similiter in suas distantias HP , HQ ab eodem hypomochlio.

Ponamus secundò potentias, quæ vecti AB applicatæ in æquilibrio consistunt, esse AE , CE , DE , BE , quarum unaquæque vectis longitudini perpendiculariter insistat. Capiatur ad alteram partem vectis punctum aliquod K , ex quo per puncta A , C , D , B ducantur rectæ totidem KE , cum quibus

L

con-

conveniant in F rectæ lineæ EF , quæ ex extremitatibus illarum potentiarum ducuntur æquidistantes vectis longitudini. Referant autem rectæ AF , CF , DF , BF potentias totidem eidem vecti similiter applicatas, quæ quum componantur ex perpendicularibus AE , CE , DE , BE , & ex parallelis designatis per rectas EF , tantundem agent in vectem, quantum ipsæ potentia perpendicularares AE , CE , DE , BE ; quandoquidem parallelæ designatæ per rectas EF ad motum vectis nequaquam conferunt, quum agant secundum ipsam vectis longitudinem.

Hinc sicuti æquilibrantur inter se mutua potentia perpendicularares AE , CE , DE , BE ; ita quoque consistent in æquilibrio potentia AF , CF , DF , BF , quæ omnes convergunt ad punctum K ; & propterea rectangula ex potentiis AF , CF in perpendiculara HN , HO , super iis demissa ex puncto H , æqualia erunt rectangulis ex potentiis DF , BF in perpendiculara HP , HQ , quæ ex eodem puncto H super iis demittuntur. Sed priora rectangula æqualia sunt iis, quæ fiunt ex potentiis perpendicularibus AE , CE in suas ab hypomochlio distantias AH , CH ; posteriora verò æqualia iis, quæ fiunt ex potentiis perpendicularibus DE , BE in distantias suas DH , BH . Quare potentia AE , CE ad unam hypomochlii partem existentes, ductæ in distantias

stant

stantias suas ab hypomochlio AH , CH , tantundem efficient, quantum potentiae, quae existunt ad partem alteram, ductae similiter in suas distantias DH , BH .

Ponamus denique potentias AF , CF , DF , BF , quae vecti AB applicatae consistunt in æquilibrio, nec omnes convergere ad unum, idemque punctum, nec omnes vectis longitudini perpendiculariter insistere. Erigantur ex punctis A , C , D , B perpendiculares ad vectem AE , CE , DE , BE , cum quibus conveniant in E rectae lineae FE , quae ex extremitatibus illarum potentiarum perpendiculariter super iis demittuntur. Et quoniam potentiae utcumque ad vectem obliquae AF , CF , DF , BF tantundem agunt in vectem, quantum agerent potentiae perpendiculares AE , CE , DE , BE ; existentibus iis in æquilibrio, necesse est, ut istae etiam æquilibrentur inter se mutuò: proindeque rectangula ex potentiis AE , CE in suas ab hypomochlio distantias AH , CH aequalia erunt rectangulis, quae sunt ex potentiis DE , BE in distantias suas DH , BH .

Demittantur porrò super ipsis AF , CF , DF , BF ulterius si opus productis perpendicularia HN , HO , HP , HQ . Et quoniam triangula AEF , CEF similia sunt triangulis HNA , HOC ; erunt rectangula, quae sunt ex potentiis AE , CE in distantias suas AH , CH .

æqualia rectangulis, quæ fiunt ex potentiis AF , CF in perpendiculara HN , HO . Atque ita quoque, quia triangula DEF , BEF similia sunt triangulis HPD , HQB ; erunt rectangula ex potentiis DE , BE in suas distantias DH , BH æqualia rectangulis ex potentiis DF , BF in perpendiculara HP , HQ . Unde, quum sint rectangula, quæ fiunt ex potentiis AF , CF in perpendiculara HN , HO , æqualia rectangulis, quæ fiunt ex potentiis DF , BF in perpendiculara HP , HQ ; etiam in hoc casu potentiæ ad unam hypomochlii partem existentes, ductæ in suas ab illo distantias, tantundem efficient, quantum potentiæ, quæ existunt ad partem alteram hypomochlii, ductæ similiter in distantias suas ab eodem hypomochlio.

C A P. V.

De æquilibrio potentiarum fila, funesve trahentium, & de mediis earum directionibus.

Quæ superiori capite ostensa sunt de potentiis trahentibus corpora inflexibilia, principia nobis suppetunt uberrima ad eum quoque casum expendendum, quum corpora, quæ trahuntur à potentiis, flexibilia sunt, cujuscumque sunt fila, vel funes.

Sic

Sit itaque filum ABC , perfectè quidem flexibile in omnibus suis partibus, non verò extensibile, idemque terminis suis A , & C duobus clavis affigatur. Applicetur alicui ejus puncto B potentia designata per rectam BD , per quam filum flectatur in angulum rectilineum ABC ; sitque potentia ista BD talis, ut si tantillum augeatur, illicò filum dirumpat, ac dilaceret.

FIG. 32.

Jam, quod potentia BD filum dilacerare conanti opponitur, & reluctatur, sunt firmitates portionum fili BA , BC . Quocirca, quia potentia BD talis supponitur, ut tantillum adaucta filum dirumpat; considerando punctum B veluti tractum à tribus potentiis BA , BC , BD , in æquilibrio consistentibus; erit ex ostensis in præcedenti capite unaquæque illarum, ut sinus anguli sub aliarum directionibus contenti; & propterea firmitas fili BA erit ad firmitatem fili BC , ut est sinus anguli CBD ad sinum anguli ABD . Ex quo colligi potest, eandem in utrâque portione fili firmitatem reperiri, quotiescumque æquales sunt anguli ABD , CBD , vel quod idem est quotiescumque angulus ABC , in quem flectitur filum à potentia BD , bifariam ab ejus directione dividitur.

Ponamus modò filum ABC , extremitatibus suis duobus clavis infixum, trahi à duabus

FIG. 33.

bus potentiis BD , EF , quæ consistant in æquilibrium, ita ut per earum actionem filum non modò disrumpi non possit, sed nec etiam mutari ab eo situ, quem semel acquisivit. Et quoniam ratione æquilibrii portio fili BE considerari potest velut linea inflexilis, quæ trahatur à duabus potentiis BD , EF ; invenietur media directio harum potentiarum, producendo ipsarum directiones, usque donec conveniant in puncto G , & considerando eas velut trahentes punctum istud. Ex quo fit, ut media directio potentiarum BD , EF transire debeat per punctum G .

Sed nihil obstat, quominus eandem fili portionem BE consideremus, velut lineam inflexilem, quæ trahatur à duabus potentiis secundum lineas BA , EC : nimirum si illam respiciamus, velut portionem fili $DBEF$, quod extremitatibus suis D & F duobus clavis affixum flectatur in eum, quem retinet, situm per duas potentias, secundum lineas illas agentes. Quocirca, quia productis earum potentiarum directionibus, usque donec conveniant in H , potentiæ illæ perinde trahunt lineam BE , ac si traherent punctum H ; transibit per punctum istud illarum media directio.

Et quoniam potentiis BD , EF trahentibus filum $ABEC$ resistunt duæ aliæ potentiæ agentes per rectas BA , EC ; erit istarum media di-

directio omnino contraria directioni mediæ illarum : proindeque , quia media directio potentiæ BD, EF transit per punctum G , & media directio potentiæ agentium per rectas BA , EC transit per punctum H ; erit GH media directio tam illarum , quàm istarum potentiæ . Unde colligi potest , quod si filum ABEC , extremitatibus suis duobus clavis affixum , trahatur à duabus potentiis BD , EF , quæ consistent in æquilibrio , media directio harum potentiæ sit diagonalis trapezii , quod mutuâ ipsarum intersectione constituunt quatuor rectæ lineæ productæ BA , BD , EF , EC.

Sed quam rationem habeant inter se firmitates portionum fili AB , BE , EC , facilius erit invenire . Nimirum , quia fili portiones AB , BE in eodem statu manent , si filum clavo affigatur puncto E , & auferatur potentia EF ; considerari poterit filum ABE veluti tractum à solâ potentiâ BD : proindeque firmitas portionis AB erit ad firmitatem portionis BE , ut est sinus anguli DBE ad sinum anguli DBA . Atque ita quoque , quia portiones fili BE , EC eundem situm retinent , si filum clavo affigatur puncto B , & auferatur potentia BD ; considerari poterit filum BEC veluti tractum à solâ potentiâ EF ; adeoque firmitas portionis BE erit ad firmitatem por-

tionis EC, ut sinus anguli CEF ad sinus anguli BEF. Ex quo patet, eandem esse in singulis fili portionibus firmitatem, quotiescumque anguli ABE, BEC bifariam dividuntur ab ipsis BD, EF.

Verum id, quum contingit, secabitur quoque angulus AHC bifariam per mediam directionem GH. Nam ducta per punctum H recta linea MN parallela ipsi BE, quae conveniat cum directionibus potentiarum in punctis M, & N; erit angulus AHN aequalis angulo ABE, & angulus GMH aequalis angulo GBE: proindeque quemadmodum angulus ABE duplus est anguli GBE, ita quoque erit angulus AHN duplus anguli GMH. Jam vero angulus AHN, tamquam exterior, est aequalis duobus interioribus, & oppositis GMH, HBM. Quare erit angulus GMH aequalis angulo HBM, & consequenter subtendentia latera BH, MH aequalia erunt.

Eadem ratione ostendemus, aequalia etiam esse latera NH, EH: proindeque erit ut MH ad NH, ita BH ad EH. Sed propter parallelas BE, MN, MH est ad NH, ut BK ad EK. Quare erit ex aequali, ut BK ad EK, ita BH ad EH; & propterea, quia in triangulo BHE recta linea HK dividit basim BE in ratione laterum BH, EH, eadem, per tertiam sexti elementorum, secabit quoque bifariam angulum

lum BHE. Unde patet, quod quotiescumque directiones potentiærum BD, EF bisecant angulos, in quos filum flectitur, media ipsarum directio inveniri possit, secundo bifariam angulum, quem mutuo occurſu conſtituunt portiones fili AB, CE.

Ponamus porro filum ABC, affixum extremitatibus ſuis B, & C duobus clavis, trahi à tribus potentiis BD, EF, GH, quæ conſiſtant in æquilibrio. Et jam ſi conſideremus tantum portionem ABEG, quæ trahitur à duabus potentiis BD, EF; erit per paulò ante oſtenſa media directio harum duarum potentiærum recta KI, quæ eſt diagonalis trapetii BIEK; adeoque loco fili ABEG, quod trahitur à duabus potentiis ſecundum rectas BD, EF, ſubſtitui poterit filum AIG, quod trahatur ab unâ ſolâ potentiâ iis æquipollente ſecundum directionem KI. Eſt autem media directio hujus potentiæ, & tertiæ GH recta MN, quæ eſt diagonalis trapetii IMGN. Quare erit eadem MN media directio trium potentiærum BD, EF, GH, à quibus trahitur filum totum ABEGC.

Jam quotcumque fuerint potentiæ filum trahentes, perſpicuum eſt, hoc artificio ſemper reperiri poſſe mediam earum directionem; adeoque poni poteſt, velut theorema generale, quod ſi filum aliquod, extremitatibus ſuis duobus clavis affixum, trahatur

FIG. 34.

tur à quocumque potentiis, media directio illarum potentiarum transeat semper per punctum illud, in quo conveniunt extremæ fili portiones. Unde si numerus potentiarum augeatur in infinitum, ita ut tensæ fili portiones fiant indefinitè parvæ, atque aded filum ipsum flectatur in curvam ABC; media directio omnium earum potentiarum transibit per punctum D, in quo conveniunt rectæ lineæ AD, CD, quæ curvam illam contingunt in duobus punctis A, & C.

FIG. 35.

FIG. 34. Ex eo autem, quod media directio potentiarum BD, EF, GH trahentium filum ABEGC transeat per punctum M, in quo conveniunt productæ extremæ fili portiones AB, CG; liquet potentias illas perinde trahere filum ABEGC, ac si applicatæ omnes secundum easdem directiones uni, eidemque puncto M traherent filum AMC. Unde si MO, MP, MQ sint rectæ totidem ipsis BD, EF, GH respectivè æquales, & parallelæ; eadem media directio transibit quoque per punctum R, commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, quæ existant in punctis O, P, Q; atque aded omnes illæ potentia simul secundum directiones suas tantundem agent in filum, quantum secundum directionem mediam ageret potentia designata per rectam MR toties sumptam, quotus est numerus ponderum, sive potentiarum.

Sed

Sed perinde ac, quum à duabus tantum potentiis filum trahebatur, ostendetur, firmitatem portionis fili AB esse ad firmitatem portionis BE, ut est sinus anguli DBE ad sinum anguli DBA; pariterque firmitatem portionis BE esse ad firmitatem portionis EG, ut est sinus anguli FEG ad sinum anguli FEB; atque ita quoque firmitatem portionis EG esse ad firmitatem portionis GC, ut est sinus anguli CGH ad sinum anguli EGH. Unde hìc quoque eadem in singulis fili portionibus firmitas erit, quotiescumque unaquæque potentia dividit bifariam angulum, quem constituunt portiones, quæ ab ipsâ trahuntur. Et par est ratio, quum multò plures sunt potentia, à quibus trahitur filum.

Id verò, quum contingit, secabitur quoque per mediam directionem MN bifariam angulus AMC, quem extremæ fili portiones AB, CG mutuo occurso constituunt. Nam semper ac potentia duæ BD, EF dividunt bifariam angulos ABE, BEG, in quos flectunt filum ABEG; necesse est, ut secetur quoq; bifariam per mediam directionem earum potentiarum KI angulus AIG. Unde, quia MN est media directio duarum potentiarum, trahentium filum AIGC tali lege, ut unaquæque dividat bifariam angulum, in quem ipsa filum flectit, secabitur etiam bi-
fa-

fariam per ipsam MN angulus AMC . Nec dissimilis erit demonstratio, si numerus potentiarum filum trahentium fuerit multo major.

Quocirca sicuti in hac re theorema est generale, quod media directio quocumque potentiarum, filum subinde trahentium, ut consistant in æquilibrio, transeat per punctum, in quo sibi mutuo occurrunt fili portiones extremæ; ita etiam velut theorema generale statui debet, quod eadem in singulis fili portionibus firmitas adsit, quotiescumque quælibet potentia dividit bifariam angulum, in quem ipsa filum flectit, quodque, quum id contingit, media directio omnium potentiarum dividat quoque bifariam angulum, quem extremæ fili portiones productæ constituunt.

FIG. 35.

Quod si potentiarum numerus augeatur in infinitum, ita ut unumquodque fili elementum, sive portio indefinitè parva à suâ potentiâ trahatur; tunc filum flectetur in curvam ABC , & media directio potentiarum omnium, ut jam monuimus, transibit per punctum D , in quo sibi mutuo occurrunt rectæ lineæ AD , CD , tangentes curvam illam in punctis A , & C . Sed in hoc casu erit eadem firmitas in singulis figuræ elementis, si cujusque potentiæ directio secet ad rectos angulos curvam ABC : quod quidem quum

COR.

contingit, inveniatur media directio potentiarum omnium, secundo angulum ADC bifariam per rectam lineam DK , ita ut AK fiat ad CK , veluti est tangens AD ad tangentem CD ,

Sed quomodocumque ad curvam ABC innumeræ illæ potentiaæ sint applicatæ, quia omnium media directio transit per punctum D , perinde erit, ac si eadem illæ potentiaæ secundum easdem directiones applicentur ad punctum istud. Ex quo colligi potest id, quod iis omnibus opponitur, & reluctatur, esse tantum firmitates earum filii portionum, quæ cum tangentibus AD , CD jacent in directum, hoc est firmitates, quas filum habet in punctis A , & C . Unde si hujusmodi firmitates datæ sint, facile erit definire tum mediam directionem potentiarum omnium, tum potentiam, quæ in hac mediâ directione iis omnibus æquivalet.

Capiantur enim super tangentibus AD , CD portiones DE , DF , quæ referant firmitates filii in punctis A , & C ; tum secetur recta EF bifariam in puncto G , & junctâ DG fiat DH dupla ipsius DG , ita ut DH sit diagonalis parallelogrammi, cujus latera sunt rectæ DE , DF . Dico rectam istam DG , sive DH esse mediam directionem omnium potentiarum curvæ ABC applicatarum; & potentiam, quæ in hac mediâ directione iis
omni-

omnibus æquivalet, esse ad firmitatem fili in A, vel C, ut est DH ad DE, vel DF.

Firmitates namque fili in punctis A, & C resistunt potentiis omnibus curvæ applicatis, quia tamquam duæ aliæ potentia trahunt ad partem contrariam punctum D, per quod trāsīt media directio illarum. Unde quū eadem firmitates designentur per rectas DE, DF; erit recta DG ipsarum media directio, ejusque duplum DH exponet firmitatem mediam, hoc est eam, quæ in hac mediā directione iis æquivalet. Sed ad servandum æquilibrium, potentiarum agentium, & resistentium eadem esse debet media directio, eademque potentia, quæ ex earum compositione oritur. Quare erit eadem recta DG media directio potentiarum omnium curvæ applicatarum, & potentia ex iis omnibus resultans erit ad firmitatem fili in A, vel C, similiter ut DH ad DE, vel DF.

Atque hinc sequens nobis subnascitur theorema, nimirum quod quomodocumque applicatæ sint potentia ad curvam ABC, in quam flectitur filum, media earum omnium directio DH non solum transeat per punctum D, in quo conveniunt tangentes AD, CD, verum etiam subinde dividat angulum ADC in duos alios ADH, CDH, ut sinus istorum angulorum sint in reciproca ratione firmitatum in punctis A, & C. Nam sinus anguli

ADH

ADH est ad sinum anguli DGE, sive DGF, ut EG, sive GF ad DE. Jam verò sinus anguli DGF est ad sinum anguli CDH, ut DF ad GF. Quare ex æquo perturbando sinus anguli ADH erit ad sinum anguli CDH, ut DF ad DE, hoc est, ut firmitas fili in puncto C ad firmitatem fili in puncto A.

Ex hoc autem theoremate sponte suâ sequitur, mediam directionē DH dividere angulum ADC bifariam, quotiescumque potentia perpendiculariter ad curvam sunt applicatae. Nam, quum hoc contingit, eadem est firmitas in singulis fili portionibus, sive elementis; adeoque propter æquales firmitates in punctis A, & C, erunt etiam æquales sinus angulorum ADH, CDH, qui firmitatibus illis reciprocè correspondent; & consequenter, quum æquales sint anguli ADH, CDH, secabitur totus angulus ADG bifariam per mediam directionem AH.

Velum vento tumidum flectitur in curvā perinde, ac si traheretur ab infinitis potentiis perpendiculariter ad curvam illam applicatis; quum omnis actio per lineam perpendicularem ad superficiem corporis patientis debeat aestimari. Undæ Nautæ facili negotio poterunt determinare lineam, secundum quam ventus agit in velum; nimirum ducendo ad veli extremitates, sive cogitatione, sive chordarum ope, tangentes duas,

duas, & bisecando angulum, quem mutuo occurſu conſtituunt; quandoquidem linea biſectionis erit illa, quam quaerunt.

Linteum quoque, quum à ſtagnante liquore ſectitur in curvam, conſiderari poteſt veluti tractum ab infinitis potentiis perpendiculariter ad curvam illam applicatis. Unde media directio impreſſionum omnium, quas in linteum exerunt liquoris particulae, habebitur ducendo ad linteae extremitates tangentes duas, & ſecando bifariam angulum ſub ipsis comprehenſum. Sed hoc idem in catenula, quae ab utroque ejus extremo pendens, in curvam ſectitur ob gravitationes ſuarum partium locum non habet; nam viſ gravitatis agit ſecundum lineas horizonti perpendiculares, nec proinde conſiderari poteſt catenula veluti tracta ab infinitis potentiis perpendiculariter ad ipſam applicatis.

Elegans hoc theorema de media directione, biſecante angulum ſub tangentibus comprehenſum, quotieſcumq; potentiae applicatae ſunt perpendiculariter ad curvam inter tangentes illas interceptam, viam nobis aperit ad novum illud curvarum genus, quas Celeberrimus Geometra Jacobus Bernoullius lineas mediarum directionum appellavit. Nam ſicuti media directio potentiarum omnium toti curvae ABC perpendiculariter applicata-

rum

rum est recta DM bisecans angulum ADC , ita media directio potentiarum, quæ applicatæ sunt ad arcum ABE , est recta FM , quæ bisecat angulum AFE . Unde lineam curvam PQM , quam omnes hujusmodi mediæ directiones contingunt, lineam mediarum directionum Vir Acutissimus vocitavit.

Patet autem curvam istam constitui per concursum duarum ex mediis illis directionibus indefinitè proximarum. Ita, si punctum E sit indefinitè proximū puncto C ; erit etiam media directio DM indefinitè proxima directioni mediæ FM ; atque aded punctum M , in quo duæ istæ mediæ directiones sibi mutuò occurrunt, erit in curvâ quæsitâ. Hinc quemadmodum convexitas curvæ ABC in puncto C definitur per angulum DGF , ita convexitas curvæ PQM , quam omnes illius mediæ directiones contingunt, designabitur in puncto M per angulum DMF ; & propterea accidens præcipuum lineæ mediarum directionum PQM hoc erit, ut convexitas ejus in omni loco subdupla sit convexitatis curvæ, ad quam refertur, ABC in loco correspondenti.

Huic verò consequens fit, ut recta GM , quæ puncta correspondentia utriusque curvæ conjungit, perpendicularis sit ad tangentem CD . Nam descriptis ex punctis C , & M tanquam centris arcubus FG , FH ,

M

pro-

propter angulum ADC bisectum per rectam DM, erit arcus FH duplus ipsius FI; adeòque, quum angulus DCF duplus sit anguli DMF, erit ut CF ad FM, ita FG ad FH. Sed FG est ad FH, ut DI ad DH; & CF est ad FM, ut CD ad DM. Quare erit ex æquali, ut CD ad DM, ita DI ad DH; & propterea, quum duo triangula DIH, DCM similia sint, & angulus DIH sit rectus; erit etiam rectus angulus DCM.

Hinc beneficio hujus theorematis facile erit, puncta singula invenire lineæ mediarum directionum PQM. Ita si inveniendum sit punctum, quod in curvâ ABC correspondeat puncto C, ductis tangentibus AD, CD, bisectoque angulo ADC bifariam per rectam DM, satis erit ex puncto C super tangente CD erigere perpendicularem CM; quandoquidem punctum M, in quo perpendicularis ista secat rectam FM, illud erit, quod quaeritur. Unde si curva ABC fuerit circumferentia circuli, linea mediarum directionum PQM in centro ejus tota coacervabitur; quum ob circuli naturam transeat per centrum, tam recta FM, quàm perpendicularis CM.

Acutissimo Jacobo Bernoullio nequaquam innotuit, mediam directionem potentiarum omnium curvæ ABC perpendiculariter applicatarum esse rectam DM, quæ biseCAT an-
gu-

gulum ADC comprehensum sub tangentibus AD, CD. Unde ad eam determinandam adhibuit perpendicularem CM, cujus valorem per quantitates differentiales expressum exhibuit. Nam, ut videre est in Actis Lipsiensibus anni 1695, positis abscissâ $AK = x$, ordinatâ $CK = y$, & curvâ $ABC = s$,

jussit, ut capiatur sēper $CM = \frac{xds^2 + xdyds}{dx^2}$;

designantibus Leibnitiano more dx differentiam abscissæ KO, sive CR; dy differentiam ordinatæ NR; & ds differentiam curvæ CN.

Quo artificio Vir Clarissimus in hunc ejus perpendicularis valorem incidit, nequaquam explicat. Sed notante Fratre ejus Johanne Bernoullio in Tractatu gallicè edito sub titulo *Essay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, simplicius adhuc perpendicularem illam exprimere potuif-

set, nimirum faciendo eam æqualem $\frac{xds}{ds - dy}$;

quandoquidem, propter triangulum rectangulum CNR, habetur $dx^2 = ds^2 - dy^2$;

adeòque erit $\frac{xds^2 + xdyds}{dx^2} = \frac{xds^2 + xdyds}{ds^2 - dy^2}$,
 $= \frac{xds}{ds - dy}$, si tam numerator, quàm deno-

minator dividatur per $ds + dy$.

Ex eo autem, quod recta DM bisecet angulum ADC, facile nobis erit perpendicularis CM valorem illum invenire. Nam propter parallelas AD, CK, & propter angulos æquales ADM, CDM, æquales erunt rectæ CD, CS: quare si ad tangentem CD perpendicularis demittatur ST, erit quoque ST æqualis abscissæ AK. Unde, quum propter triangula similia NCR, CST, inveniatur

$$CS, \text{ five } CD = \frac{x ds}{dx}, \text{ \& } CT = \frac{x dy}{dx}; \text{ fiet } DT \\ = \frac{x ds - x dy}{dx}, \text{ \& consequenter propter similitudinem triangulorum DTS, DCM invenietur } GM = \frac{x ds}{ds - dy}.$$

C A P. VI.

De curvis, in quas flectuntur corpora flexibilia per infinitas potentias perpendiculariter iis applicatas.

QUum filo, funi, aut alteri cuilibet corpori flexibili infinitæ potentiæ applicantur, necesse est, ut illud flectatur in curvam aliquam lineam, ubique cur-

curvaturæ continuæ, nec ullis angulis interruptam; quia unumquodque ejus elementum suam habet potentiam, à qua trahitur. Hinc circa corpora flexibilia, quæ per infinitas potentias iis applicatas flectuntur in curvam, non modò illud quæri potest, quæ sit media directio omnium illarum potentiarum, quæve potentia ex omnium compositione resultans; verùm etiam quæ sit natura illius curvæ, in quam ipsa corpora flectuntur.

Et quidem ad corpus aliquod flexibile nō aliā ferè ratione applicari possunt infinitæ potentiæ, quàm faciendo ut illud compri-matur per actionem alicujus fluidi, vel in ejus superficiem illabentis, vel etiam stagnantis intra eam. Unde naturam curvarum definituri, in quas flectuntur corpora flexibilia per infinitas potentias iis applicatas, non alium casum expendemus, quàm quum potentiæ perpendiculariter ad curvas illas sunt applicatæ, atq; aded eadem est firmitas in singulis elementis corporum flexibilium; quandoquidem omnis actio, sive compressio per lineam perpendicularem ad superficiem corporis patientis debet æstimari.

Ille autem in hac re viam nobis aperiamus, quæ sensim ad id, quod quærimus, nos manuducat; concipiamus rursus filum

FIG. 33. ABEC, quod extremitatibus suis affixum duobus clavis trahatur à duabus potentiis BD, EF in æquilibrio consistentibus. Itaque quia potentiæ BD resistunt firmitates portionum fili AB, BE; erit ut potentia BD ad firmitatem ipsius AB, ita sinus anguli ABE, sive ABL ad sinum anguli DBE. Atque ita quoque; quia potentiæ EF resistunt firmitates portionum fili BE, EC, erit ut potentia EF ad firmitatem ipsius BE, ita sinus anguli BEC, sive BEH ad sinum anguli FEC. Ex quo sequitur potentiam BD ad potentiam EF rationem habere compositam ex firmitate portionis AB ad firmitatem portionis BE, ex sinu anguli ABL ad sinum anguli BEH, & ex sinu anguli FEC ad sinum anguli DBE.

Hinc siquidem ponamus, potentias BD, EF bisecare angulos ABE, BEC, in quos flectitur filum ABEC; eadem erit firmitas, sive vis resistendi in singulis fili portionibus: adedque, quia ratio, quam habet firmitas portionis AB ad firmitatem portionis BE, est ratio æqualitatis; habebit potentia BD ad potentiam EF rationem compositam ex sinu anguli ABL ad sinum anguli BEH, & ex sinu anguli FEC ad sinum anguli DBE. Unde si ponamus ulterius, rectos esse angulos DBE, FEC, ita ut sinus ipsorum habeant quoque rationem æqualitatis; fiet ut po-
ten-

entia BD ad potentiam EF , ita sinus anguli ABL ad sinum anguli BEH .

Concipiamus jam, portiones fili AB , BE , EC minui in infinitum, ita ut anguli ABL , BEH fiant indefinitè parvi, & $ABEC$ fiat portio alicujus curvæ lineæ, cui perpendiculariter sint applicatæ potentiæ BD , EF . Manebit itaque adhuc, ut potentia BD ad potentiam EF , ita sinus anguli ABL ad sinum anguli BEH . Sed propter indefinitam horum angulorum parvitatem, sinus ipsorum iisdem proportionem correspondent. Quare erit ex æquali, ut potentia BD ad potentiam EF , ita angulus ABL ad angulum BEH : & propterea quia angulus ABL designat convexitatem curvæ in puncto B , & angulus BEH denotat convexitatem curvæ in puncto E , erit rursus ut potentia BD ad potentiam EF , ita convexitas curvæ in puncto B ad convexitatem curvæ in puncto E .

Curvæ igitur, cui infinitæ potentiæ perpendiculariter sunt applicatæ, hoc quidem est accidens præcipuum, ut convexitas ejus in quolibet loco sit, ut potentia, quæ curvam trahit in loco illo. Atque hinc sponte suâ sequitur, curvam debere esse circula-rem, quotiescumque potentiæ omnes, perpendiculariter ad curvam applicatæ, inter se sunt æquales; quandoquidem inter omnes curvas sola circuli circumferentia ean-

dem ubique convexitatem habet . Unde mirari non subibit , quod ampullæ , quas Infantes ex loturâ saponis conficiunt , in rotunditatem tornentur ; quia aer intus inclusus æquales in singulas earum particulas exerit pressiones ; adeòque perinde est , ac si particulæ illæ per totidem potentias æquales perpendiculariter traherentur .

Eâdem autem ratione vesiculæ fibrarum muscularium , si quæ sint , quum à spiritibus animalibus , aut ab aliâ æquivalente materiâ inflantur , non aliam figuram sibi debent conciliare , quàm circula-rem ; quandoquidem distenduntur ab iis spiritibus , qui æquali vi agunt in parietes earum vesicularum . Ex quo colligi potest , oscitanter nimis Clarissimum nostrum Borellũ in Tractatu suo de motu Animalium vesiculis illis figuram rhomboidalem attribuisse ; quum hujusmodi figura nequaquam conveniat cum pressione spirituum , propter quam vesiculæ distenduntur : & credibile est , hanc eis figuram rectilineam Virum summum assignasse , ut commodiori calculo supputaret relationes , quas vires dilatantes habent ad resistentias superandas.

Sed quod dicimus , vesiculas fibrarum muscularium , ob æquales spirituum , à quibus inflantur , pressiones , non esse rhomboid-

boidales, sed circulares; id intelligi debet, si musculus nullam haberet resistantiam superandam. Verum, quia musculus semper pondera, & resistantias, si non extrinsecus advenientes, saltem sui ipsius, & ossium, quibus alligatur, submovere debet; fit hinc, ut vesiculæ illæ non integram adispiscantur figuram circulare, sed ob resistantiam removendam nonnihil in longitudinem se distendant: non secus, ac ampulla, ex loturâ saponis confecta, ob gravitatem guttulæ, fundo ejus adhærentis, tantillum elongatur, & ex sphærâ mutatur in sphæroidem, factam ex circumvolutione segmenti circularis.

Similiter orificia vasorum; & pori glandularum nostri corporis non alias figuras, quàm circulares habebunt. Unde colligi potest secretiones fluidorum, quæ fiunt in glandulis illis, non magis feliciter per diversam pororum configurationem explicari, quàm per multiplicia illa fermenta, quæ primum apud Anatomicos obtinebant. Nam semper ac pori glandularum figuras habent circulares, ii non figuris, sed figurarum amplitudine different à se mutuo: proindeque solâ figurarum consideratione intelligi non potest, cur vascula quædam fluida nonnulla, & vascula alia fluida alterius generis excipere cogantur.

Per contrarium autem, quum potentia ad curvam applicata nequaquam sunt æquales, fieri nullo pacto potest, ut curva illa sit circularis. Hinc velum vento tumidum in circuli circumferentiā flecti non potest, nec item linteum, quod stagnante liquore intumescit; quia utroque casu singula curvæ elementa à totidem aeris, vel liquoris filamentis premuntur quidem ad rectos angulos, sed æquales pressiones non subeunt, nec ideo ab æqualibus potentiis trahuntur. Sed cognitâ lege pressionis, quam in curvæ elementa exerunt filamenta, sive aerea, sive liquoris; facile erit ex ostenso theoremate naturam curvæ definire, quam sive velum, sive linteum cogitur induere.

FIG. 37. Nimirum ostendemus in Hydrostaticâ vim, qua fluida quævis materia pellit datam aliquam superficiem, ad eam utcunque inclinatam, esse ut quadratum sinus inclinationis. Itaque si AN sit curva velaria, quæ excipiat ventum secundum directionem axi AM parallelam; vis, qua pellitur constans curvæ elementum NQ, ubicumque sumatur, erit semper, ut NR quadratum. Sed ex ostenso theoremate eadem vis est, ut convexitas curvæ in puncto Q. Quare si recta OS curvam contingat in Q, & centro Q intervallo QN describatur arcus NO; quadratum ex NR ipsi NO ubique proportionem cor respon-

de-

debit ; adeòque id , quod oritur , dividendo NR quadratum per NO idem ubique erit.

Jam , quum NR sit infinitesima primi generis , erit NR quadratum infinitesima generis secundi. Unde quum etiam NO sit infinitesima secundi generis ; per ea , quæ à nobis ostensa sunt de calculo infinitesimarum in priori nostræ Algebræ libro , NR quadratum divisum per NO dabit quotientem finitum. Designet itaque recta AB , axi AM perpendicularis , quotientem istum , & ex termino ejus B ducantur rectæ BC , BD æquidistantes rectis NT , QS , quæ curvam contingunt in punctis N , & Q ; describaturque centro B intervallo BD arcus DE .

Et quoniam AB est quotiens , qui oritur , dividendo NR quadratum per NO ; erit ut NO ad NR , ita NR ad AB : proindeque NR ad AB rationem habebit compositam ex NO ad NQ , & ex NQ ad NR . Jam verò propter sectores similes NQO , BDE , NO est ad NQ , ut DE ad BD , sive BC ; itemque , propter triangula similia NQR , BCA , NQ est ad NR , ut BC ad AB . Quare ex æquali NR erit ad AB in ratione compositâ ex DE ad BC , & ex BC ad AB , sive etiam in ratione simplici DE ad AB ; adeòque erit NR æqualis ipsi DE .

Hinc , quum similia sint triangula NQR , DCE , erit non modò NR æqualis DE , verum

rùm etiam NQ æqualis CD , & QR æqualis CE : proindeque, quum eadem sit demonstratio in omni loco, erit tum summa omnium NQ æqualis summæ omnium CD , tum summa omnium QR æqualis summæ omnium CE : & idcirco si centro B , & intervallo BA describatur arcus AF , qui secet rectam BC in puncto F , erit curva tota AN æqualis rectæ AC , & abscissa AM æqualis portioni per arcum abscissæ CF .

Unde modò præcipuæ hujus curvæ proprietates pronò alveo fluunt. Patet etenim primò rectam AB , quam velut constantem parametrum ejus dicere licebit, esse ad quamlibet curvæ portionem AN , ut est ordinata correspondens MN ad subtangentem MT . Nam, propter triangula similia MNT , ABC , AB est ad AC , ut MN ad MT . Ostensum est autem, arcum curvæ AN æqualem esse rectæ AC . Quare erit quoque ut parameter AB ad arcum curvæ AN , ita ordinata correspondens MN ad subtangentem MT .

Patet secundò, quod si capiatur AH æqualis AB , & compleatur rectangulum MK , spatium exterius $AHKN$ æquale sit rectangulo, quod fit ex parametro AB in arcum curvæ AN . Est enim AM æqualis CF : quare, quum AH sit æqualis AB sive BF , erit tota MH , sive NK æqualis BC ; & propterea
ob

ob æquales NR , DE , erit spatiolum $KNQI$ duplum exigui trianguli BCD ; atque ita, quum spatium totum $AHKN$ duplum fiat totius trianguli ABC , erit idem æquale re-
ctangulo ex AB in AC , hoc est ex parametro in arcum curvæ AN .

Patet demum, quod si centro H , & vertice A describatur hyperbola æquilatera AP , quilibet curvæ arcus AN æqualis sit ordinatæ in hyperbolâ correspondenti MP . Nam propter proprietatem hyperbolæ MH , sive BC quadratum est æquale quadrato ex AH , sive AB unâ cum quadrato ex MP . Sed ob triangulum reſtangulum BAC , idem BC quadratum est æquale quadratis, quæ fiunt ex AB , & AC . Quare erit AC æqualis MP , hoc est arcus curvæ AN æqualis ordinatæ hyperbolæ MP .

Atque hæc quidem sunt palmarie curvæ velariæ proprietates, ex quibus nullo negotio deducuntur æquationes duæ differentiales, in quas inciderunt Clarissimi Bernoullii Fratres. Nam si ponatur parameter $AB = a$, abscissa $AM = x$, & ordinata $MN = y$; erit $QR = dx$, $NR = dy$, & arcus curvæ $AN = \sqrt{2ax + xx}$. Unde, quum AB sit ad AN , ut MN ad MT , sive etiam ut NR ad QR ; erit ut a ad $\sqrt{2ax + xx}$, ita dy ad dx : proindeque erit $dy \sqrt{2ax + xx} = adx$, quæ
est

est prima æquatio differentialis. Sed si abscissæ sumantur à centro hyperbolæ H , ponaturque $HM = x$; fiet arcus curvæ $AN =$

$\sqrt{xx - aa}$; atque adeò invenietur $dy \sqrt{xx - aa} = adx$, quæ est æquatio differentialis altera.

Circa curvam velariam illud quoque ab iisdem Fratribus est observatum, nimirum quod ea sit ejusdem naturæ cum catenariâ, hoc est cum curvâ, in quam flectitur proprio pondere catenula, ab utroque ejus extremo pendens: quamquam notabile intersit discrimen inter actionem venti in velariâ, & actionem gravitatis in catenariâ; quum in illâ impressiones fiant secundum lineas perpendiculares curvæ elementis, ob generalem legem pressionis, quod æstimari debeat secundum lineam perpendicularem superficiei corporis patientis; in istâ verò secundum directiones perpendiculares ad horizontem, ob naturam gravitatis, quæ in hunc modum operatur.

FIG. 38. Itaque, ut hæc inter utramq; curvam identitas Lectoribus nostris innotescat, sit NAO curva catenaria, cujus punctum infimum sit A , & axis recta AM . Et quoniam nec curvatura arcus AN , nec vires, quibus ejus elementa singula pelluntur deorsum, ullam patiuntur mutationem, si auferatur portio catenulæ AO , & reliquæ AN extremitas figatur in A ; transibit per ostensa in superiori

ri capite media directio omnium illarum virium per punctum C, in quo conveniunt tangentes AB, NT; æque tantundem agent adversus firmitates catenulæ in punctis A, & N, quantum si omnes simul secundum eadem directiones applicatæ essent puncto C.

Et quoniam vires, quibus pelluntur elementa singula curvæ AN, sunt propriæ ipsorum gravitationes; applicando eas propriis directionibus puncto C, perinde erit, ac si exinde suspendatur pondus P, tantundem gravitans, quantum catenula tota AN. Sed firmitas catenulæ in A est ad pondus P, ut sinus anguli NCP, sive PCT, aut CTM ad sinum anguli ACN, sive CNM. Quare erit quoque, ut sinus anguli CTM ad sinum anguli CNM, hoc est, ut MN ad MT, ita firmitas catenulæ in A ad pondus totius catenulæ AN, unde designando firmitatem catenulæ in A, utpote constantem, per rectam magnitudine datam AB, & pondus totius catenulæ AN per curvam ipsam AN, cujus longitudini proportionem semper correspondet; erit ut ordinata MN ad subtangentem MT, ita recta AB ad curvam AN, quæ est proprietas potissima curvæ velariæ.

Patet autem, curvam catenariam eandem esse cum curvâ velariâ in hypothese, quod catenula sit gravitatis uniformis, ita ut æqualia ejus elementa æqualiter gravitent;
adeoq;

adedque pondus cujusque portionis per longitudinem ejusdem possit designari. Sed res longè aliter erit, si catenula fuerit gravitatis difformis. Tunc enim curva catenaria alia, atque alia erit, prout diversimodè portiones ejus difformiter graves supponuntur. Et speciatim erit parabola, si pondus cujusque portionis per ordinatam correspondentem possit designari; quandoquidem erit in hoc casu, ut AB ad MN , ita MN ad MT ; adeoque quadratum ordinatæ MN æquale erit rectangulo ex rectâ constante AB in subtangentem MT : quæ proprietas inter curvas omnes nonnisi parabolæ competit.

Patet quoque identitatem inter velariam, & catenariam obtinere in hypothefi, quod directiones gravium sint parallelæ. Sed si quidem convergant omnes ad datum punctum F , tunc catenaria erit hyperbola, habens punctum illud F pro umbilico exteriore. Nam in isto casu media directio virium, quibus pelluntur deorsum elementa singula curvæ AN , transibit non modò per punctum C , in quo conveniunt tangentes AB , NT , verùm etiam per punctum F , ad quod directiones earum virium convergunt. Unde quia omnes illæ vires, applicatæ secundùm proprias directiones ad punctum F , continentur intra angulum AFN , & velut æquales terminantur ad unum,
cun-

eundemque arcum descriptum ex puncto F tamquam centro ; eadem media directio illarum virium bisecabit angulum AFN , quum per superius ostensa debeat quoque transire per commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, quæ vires illas designant. Ex quo sequitur, catenariam NAO hyperbolam esse, habentem punctum F pro umbilico exteriori ; quum ei soli relatè ad umbilicos competat hæc proprietas, ut recta, quæ ex concursu duarum tangentium ducitur ad datum punctum, bisecet angulum, quem in puncto illo constituunt rectæ lineæ ex contactuum punctis exeuntes.

Sed in hypothese, quod gravium directiones convergant ad datum punctum F , curva catenaria erit hyperbola, habēs punctū illud pro umbilico exteriori, quotiescumque catenula est gravitatis uniformis, ita ut vires, quibus singula ejus elementa urgentur, applicatæ ad punctum F , possint tamquam æquales terminari ad unum, eundemque arcum, descriptum ex puncto F tamquam centro. Res autem fecus erit, si catenula fuerit gravitatis difformis, neque aded æquales sint vires, quibus ejus elementa singula pelluntur ; quia tunc prout diversimodè supponuntur difformiter gravia catenu-

læ elementa, sic curva catenaria alia, atque alia orietur. Verum erit rursus hyperbola, & quidem æquilatera, centrum habens punctum F , si gravitas in catenulæ elementis tali lege modificetur, ut firmitates eorundem elementorum prodeant proportionales distantis suis à puncto F , ad quod gravium directiones convergunt.

Nam, iisdem semper suppositis, firmitas catenulæ in A erit ad firmitatem catenulæ in N , ut distantia AF ad distantiam NF . Sed quum media directio virium, quibus resistunt, sit recta GCF ; firmitas catenulæ in A est ad firmitatem catenulæ in N , ut sinus anguli NCG , sive FCT ad sinum anguli ACG , sive FCA . Quare erit ex æquali, ut AF ad NF , ita sinus anguli FCT ad sinum anguli FCA . Jam verò demisso super tangente NT perpendiculo FH , & assumptâ CF pro radio, sive sinu toto, fit FH sinus anguli FCT , & FA sinus anguli FCA . Itaque erit rursus ex æquali, ut AF ad NF , ita FH ad AF ; & propterea AF quadratum erit æquale reſtanguſo NFH : id quod ostendit, curvam AN esse hyperbolam æquilateram centrum habentem punctum F ; quum ei soli inter omnes curvas competat hæc proprietas.

Sed de curvâ velariâ, & catenariâ, quæ hætenus dicta sunt, sufficere videntur. Tran-

ſea-

seamus modò ad curvam, in quam flectitur linteum, stagnante aliquo liquore homogeneo compressum. Itaque sit ANC curva ista, FIG. 39. cujus punctum supremum sit A , punctum infimum C , axis horizontalis recta AB , & axis verticalis recta BC . Ducantur ad axim BC tres ordinatæ MN , PQ , RS indefinite proximæ, quæ abscindant ex curvâ portiones æquales NQ , QS ; & productâ QS versùs O , describatur ex puncto Q tamquam centro arcus NO , ducanturque NH , OI , QK ipsi BC parallelæ; denique cōcipiatur triangulum rectangulum æquicrure BCD , cum cujus hypotenusâ BD convenient ductæ ordinatæ in punctis E , F , G .

Jam ostendemus in hydrostaticâ liquores homogeneos gravitare in vassium bases, & latera pro ratione altitudinis. Quare pressio, quam subit ab incumbente liquore constans curvæ elementum NQ , erit ut altitudo BM , five ME . Sed ex ostenso theoremate eadem pressio est, ut convexitas curvæ in puncto Q , hoc est, ut arcus NO dato radio descriptus. Itaque BM , five ME ipsi NO proportionem respondebit; proindeque areola $PMEF$ ad rectangulum ONH datam rationem habebit.

Verumtamen, quia angulus ONQ rectus est, erit angulus NOI æqualis angulo NQH ; adeòque ducendo per punctum N rectam li-

neam ordinatæ PQ parallelam, facile intelligetur NO esse ad HI , ut est NQ ad NH . Unde, quum rectangulum ONH æquale sit ei, quod fit ex NQ in HI ; ob datam NQ , habebit rectangulum illud ONH ad HI datam rationem: & propterea data etiam erit ratio, quam habet areola $PMEF$ ad HI , hoc est ad differentiam ipsarum QH , SK ; quum, propter æquales, & in directum positas QS , QO , æquales sint etiam SK , QI .

Eâdem ratione ostendetur, quod si TV sit alia ordinata prioribus indefinite proxima, quæ abscindat ex curvâ arcum SV , æqualem cuique ipsorum NQ , QS , & ducatur per punctum S recta linea SL parallela axi BC ; areola $RPFG$ habeat datam rationem ad differentiam ipsarum SK , VL . Quare componendo area $RMEG$ ad differentiam ipsarum QH , VL datam quoque rationem habebit. Unde, quum eadem demonstratio continuari possit, usque donec perveniatur ad punctum supremum A , ubi VL prorsus evanescit; concludi poterit, naturam curvæ lintei ANC talem esse, ut triangulum BME , ubicumque sumatur, sit semper ut QH differentia ordinatarum MN , PQ , quæ datum ex curvâ elementum abscindunt.

Huic verò consequens est, ut siquidem in puncto infimo C idem datum curvæ elementum capiatur, ei proportionem correspon-

spondeat triangulum totum BCD ; quandoquidem in puncto illo, propter axim BC rectos cum curvâ angulos facientem, differentia ordinatarum QH in ipsum definit elementum. Unde, quum sit, ut QH ad NQ , ita triangulum BME ad triangulum BCD ; erit quoque, ut QH ad NQ , ita BM quadratum ad BC quadratum: adeoq; positis $BC = a$, BM , five $WN = x$, & $AW = y$, nullo negotio deducetur æquatio differentialis $xxdx = dy \sqrt{a^4 - x^4}$, quam Celeberrimi Bernoullii Fratres invenerunt.

In determinandâ curvâ linteï posuimus liquorem stagnantem homogeneum esse, ita ut pressiones, quas subeunt æqualia curvæ elementa NQ , QS , SV designari possent per altitudines correspondentes BM , BP , BR , five etiam per ordinatas trianguli ME , PF , RG . Sed facile erit ad liquores etiam heterogeneos eandem determinationem extendere: nimirum si loco trianguli BCD describatur figura alia, quæ similiter ordinatis suis designet diversas pressiones, quas ab incumbente liquore subeunt correspondentia curvæ elementa; quandoquidem eidem insistentes analysi, inveniemus semper aream totam BCD esse ad aream BME , ut NQ ad QH . Unde si BCZ sit figura alia, cujus ordinatæ CZ , MX sint ut correspondentes areæ BCD , BME figuræ prioris, manentibus

bus adhuc $BC = a$, $AW = y$, & WN , si-
ve $BM = x$, positisque insuper $CZ = b$, &
 $MX = p$, invenietur pro omni casu æqua-
tio differentialis $dy \sqrt{bb} - pp = p dx$, con-
veniēs adamussim cum illâ, in quam laudati
Fratres inciderunt in solutione problematis
generali.

FIG. 40.

Curva linteï stagnante liquore homoge-
neo compressi, notante Jacobo Bernoullio,
non differt ab eâ, in quam flectitur lamina
elastica, & gravitatis expers ANC *cna*, unâ
ejus extremitate Cc alicubi ad perpendicu-
lum firmata, dum trahitur per pondus P ,
quod ab altera extremitate pendens, eam
usque adeò flectit, & incurvat, donec ipsa,
ejusque tangens in A normalis fiat ponde-
ris directioni AB . Id verò haud difficile erit
ostendere. Nam siquidem in curvâ interiori
 ANC constans elementum capiatur NQ ,
& ex punctis N , & Q perpendiculares
ad eandem curvam erigantur Nn , Qq , ipsi-
que Qq parallela agatur No ; designabit
triangulum nNo tensionem laminulæ NQ
 qn , & no tensionem elementi nq curvæ
exterioris. Unde, quia vis tendens por-
tionem nq æquilibratur in puncto N cum
pondere P laminam totam incurvante;
ob legem æquilibrii vis illa tendens, quæ
designari potest per tensionem ipsam no
tamquam per suum effectum, vel etiam
per

per arculum NO (quum propter triangu-
la similia nNo , NQO , no sit ad NO in datâ
ratione) erit ad pondus P, ut WN ad Nn;
adeòque, quia datum est pondus P, data-
que est laminæ crassities Nn, fiet ipsi NO
ubique proportionis WN, sive BM: prorsus
ut in curvâ linteï, stagnante liquore homo-
geneo compressi.

Perspicuum est autem, identitatem istam
inter elasticam, & curvam linteï non aliâ
de causâ habere locum, quam quia vires
tendentes proportionales assumuntur ipsis
tensionibus; atque adeò per eandem ordina-
tam WN, sive BM designatur tam vis ten-
dens portionem nq , quàm tensio ipsa no , si-
ve ei proportionalis arculus NO. Cæterùm
si definienda sit curva elastica pro quacum-
que virium tendentium hypothesi; oportet
bit circa rectam BC describere scalam ten-
sionum, hoc est figuram talem BCD, ut de-
signantibus abscissis BC, BM vires tenden-
tes, referant ordinatæ correspondentes CD,
ME ipsas tensiones: non secus ac pro deter-
minandâ curvâ linteï, quum liquor sta-
gnans est heterogeneus, describenda est circa
axem curvæ verticalem scala pressio-
num, quas ab incumbente liquore subeunt corre-
spondentia curvæ elementa. Unde erit rur-
sus curva elastica eadem cum curvâ linteï, si
scala pressio- num in istâ sit eadem cum scalâ
tensionum in illâ.

C A P. VII.

*De resistantiâ solidorum, tam verticaliter,
quàm horizontaliter suspensorum.*

Constat experienciâ, machinas, quæ in parvis elaboratæ, felicem obtinent eventum, in magnis eâdem proportionem constructas, non æquè feliciter effectus suos sortiri. Id communiter rejiciebatur in defectus inevitabiles artis manualis, qui sæpè sæpiùs veram, solidamque rerum theoriam apud vulgus hominum miserè dedecorant. Sed observavit Galilæus, diversitatem istam longè majorem esse, quàm quæ ex solâ istâ causâ repeti posset. Itaque aliud quidpiam adesse conjecit, ex quo illa esset differentia deducenda: id, quod dum sedulò perquisivisset, pervenit tandem ad doctrinam de resistantiâ solidorum, Phisicis ante ipsum penitus incognitam, de qua breviter quidem, sed perspicuè, hoc capite agendum nobis erit.

Corporis verticaliter suspensi partes omnes graves esse, & per istam gravitatem conari inferiores à superioribus divelli, notius est, quàm ut possit inficiari. Jam ista divulgatio revera fieret, nisi ratione unionis adesset in iisdem partibus vis contraria, qua ad-

adversus eam resistunt, ac reluctantur. Quocirca in corpore sic verticaliter suspensum duæ poterunt vires oppositæ considerari; una quidem, quæ dependet à gravitate suarum partium, & per quam unaquæque à suâ contiguâ conatur separari; altera, quæ profluit ab unione earundem partium, quæque vis resistentiæ poterit insigniri.

Hæc vis resistentiæ, non aliter definiri potest, quàm per maximum pondus, quod corpus verticaliter suspensum potest sustinere absque eo, quod fractionem patiatur. Sed, quum eadem oriatur ex nexu partium inferiorum cum superioribus, habebitur quoque quantitas ejus absoluta, multiplicando unamquamque partem per vim, qua ea connectitur cum suâ contiguâ, & capiendo summam omnium istorum productorum. Unde in corporibus ejusdem ubique densitatis eadem vis resistentiæ proportionem semper correspondebunt sectioni, in qua illam consideramus; quandoquidem propter eandem ubique densitatem vis nectens in singulis partibus est eadem, & numerus partium connexarum est, ut ipsa sectio, in qua partes illæ reperiuntur.

Hinc prisma homogeneum, quod verticaliter suspensum proprio pondere non dirumpitur, nec etiam adauctâ base dirumpetur; quandoquidem tam pondus, quàm
vis

vis resistentiæ augetur in ratione basis . Sed longè secus res erit , si augeatur longitudo , quia tunc augebitur quidem pondus , sed non item vis resistentiæ . Quare prismata , ex eâdem , & homogeneâ materiâ constantia , si eandem habeant longitudinem , suspensa verticaliter erunt æquè resistentia ; sed si fuerint longitudinis diversæ , debilius semper erit illud , cui major est longitudo , tametsi basim habeat longè maiorem .

Jam ut maxima longitudo inveniat , in quam prisma aliquod ejusdem ubique densitatis distendi possit absque eo , quod verticaliter suspensum proprio pondere frangi queat ; satis erit maximum pondus invenire , quod prisma illud sic verticaliter suspensum potest sustinere absque eo , quod per actionem ejus ponderis disrumpi possit . Nam si prisma eousque deinde protrahatur , donec pars adjecta tantundem gravitet , quantum maximum illud pondus ; hæc erit maxima longitudo quæsitâ . Atque hoc artificio detexit Galilæus , maximam longitudinem , quam cylindrus ex ære habere potest absque eo , quod verticaliter suspensus proprio pondere frangi possit , esse brachiorum 4801 .

Ex dictis illud etiam colligi potest , quod prisma homogeneum verticaliter suspensum nequeat esse æqualis resistentiæ per totam
sui

fui longitudinem ; nam etſi ſectio horizontalis , per quam definitur reſiſtentia vis absoluta , eadem ſit in omni loco , attamen pondus infra ſectionem exiſtens non eſt idem ubique . Interim ſi priſma conſideretur veluti expertus omnis gravitatis , & ejus extremitati appendatur pondus , quod illud trahendo diſrumpere conetur ; tunc ubique erit æquè reſiſtens , quia hoc caſu idem eſt pondus , quod infra quamlibet ſectionem exiſtit . Patetque , præter priſmata , nulla alia ſolida dari poſſe , quæ conſiderata tamquam gravitatis expertia ſint ubique æqualis reſiſtentia.

Generaliter autem , grave ſolidum homogeneous , verticaliter ſuſpenſum , erit ubique æquè reſiſtens , ſi ſectio horizontalis ubicumque facta ſit ſemper , ut portio ſolidi , quæ infra ſectionem exiſtit . Hinc ſi ABC ſit curva logarithmica , & DE ejus aſymptotus ; ſolidum , quod deſcribitur per revolutionem ſpatii indefiniti (ſive potiùs infinite longitudinis) ADEC circa aſymptotum DE , ſuſpenſum verticaliter erit æqualis ubique reſiſtentia . Nam ductâ OQ , quæ logarithmicam alicubi contingat in B , & demiffâ ad aſymptotum ordinatâ BF ; inter alias proprietates logarithmicæ , quas recensuit Chriſtianus Hugenius in calce ſuæ diatribæ de cauſâ gravitatis , una eſt ,
quod

FIG. 41.

quod solidum descriptum per revolutionem spatii infiniti BCEF sit in datâ ratione cum cono descripto per revolutionem trianguli BOF, nimirum in ratione sesquialterâ. Unde, quia conus iste, propter subtagentem OF, constantem in logarithmica, est ut basis ipsius; erit idem solidum descriptum per revolutionem spatii infiniti BCEF, ut circulus, qui describitur per ordinatam BF.

Itaque vis resistentiæ in corpore homogeneo verticaliter suspenso æstimari debet in omni loco per sectionem horizontalem factam in loco illo. Sed non perinde res erit, si idem corpus parieti horizontaliter sit affixum. Tunc enim tam pondus, quàm vis resistentiæ aliâ ratione agunt in se mutuo, nimirum vecte velut interjecto. Nam si parieti PQ horizontaliter affigatur corpus aliquod AE, quod proprio pondere propè parietem disrumpatur, fiet omnis motus super rectâ horizontali AC tamquam hypomochlio. Quocirca si sectionis verticalis ABC resistentia tota concipiatur veluti collecta, & coacervata in puncto H, quemadmodum tota gravitas corporis AE unita concipitur in centro suæ gravitatis G; demissis verticalibus GM, HN, erit HN radius vectis, cui applicata est resistentia, & MN radius vectis, cui applicatum est pondus.

Jam

Jam quotiescumque corpus AE est ejusdem ubique densitatis, partes sectionis ABC connectuntur eadem vi cum partibus superficiei contiguæ; adeoque, quia vis resistentiæ, quæ oritur ex nexu illo, spargitur per sectionem ABC eadem omnino ratione, qua diffunditur per partes ejus vis gravitatis, erit punctum H , in quo colligitur tota resistentia, idem omnino cum centro gravitatis ipsius sectionis. Ex quo patet, in corporibus homogeneis horizontaliter suspensis momentum resistentiæ in omni loco definiendum esse, non per sectionem verticalem factam in loco illo simpliciter, sed per eam ductam in distantiam centri suæ gravitatis ab hypomochlio; atque ita quoque momentum ponderis, cum quo reluctatur resistentia, definiendum esse non per pondus ipsum simpliciter, sed per illud ductum in distantiam sui centri à plano sectionis.

Hinc in prismatico homogeneo, parieti horizontaliter affixo, momentum resistentiæ æstimari poterit per basim ductam in prismatis altitudinem, momentum verò ponderis per factum ex pondere in longitudinem prismatis. Unde cylindrus, exempli gratiâ, ex ære, qui unâ sui extremitate verticaliter suspensus frangi non potest, nisi longitudinem habeat paulò majorem, quàm brachiorum 4801, affixus dein-

*vide mo-
nitum ad
lectorem
pag: 550.*

deinde horizontaliter parieti, frangetur longitudine longè minori; quandoquidem in hoc casu major longitudo dupliciter confert ad cylindri fracturam, primò quia auget pondus cylindri, & secundò, quia longius reddit brachium vectis, cui pondus illud concipitur applicatum.

Ponamus jam in prismatico homoganeo horizontaliter suspenso momentum resistentiæ æquari cum momento ponderis. Erit igitur vis resistentiæ absoluta, quæ per basim prismatis definitur, ad pondus prismatis absolutum, ut longitudo ad altitudinem. Sed vis resistentiæ absoluta definitur quoque per maximum pondus, quod prisma verticaliter suspensum potest sustinere. Itaque maximum pondus, quod sustinere potest prisma in suspensione verticali, erit ad maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, ut longitudo ad altitudinem; & propterea si longitudo dupla fuerit altitudinis, maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, dimidiū erit ejus, quod sustineret in suspensione verticali.

Idem obtinet quoque, si prisma suspensum horizontaliter concipiatur omnis expers gravitatis, & ex medio pendeat tale pondus, ut illud disrumpat tantillum adactum; nam semper maximum pondus, quod sustinere potest prisma in suspensione

ver-

verticali, erit ad maximum istud pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, ut longitudo ad altitudinem. Sed si pondus suspendatur ex extremitate prismatis, tunc altitudo sumenda est dimidiata, vel etiam duplicanda est longitudo; quandoquidem radius vectis, cui pondus concipitur applicatum, est tota prismatis longitudo.

Corpus horizontaliter suspensum erit æqualis ubique resistentiæ, si in qualibet sectione verticali momentum resistentiæ datam servet rationem cum momento ponderis correspondentis. Hinc prisma homogeneum basi suâ parieti horizontaliter affixum per totam sui longitudinem non potest esse æquè resistens; nam momentum resistentiæ in omni sectione verticali manet idem, & immutatum, sed non item momentum ponderis, cum quo resistentia reluctatur, quippe quod in recessu à pariete minuitur tum ratione ipsius ponderis, tum etiam ratione brachii vectis, cui concipitur pondus applicatum.

Sed neque etiam erit æquè resistens, si concipiatur omnis expers gravitatis, & ex extremitate ejus pendeat pondus aliquod, quod illud trahendo disrumpere conetur. Nam etsi in omni sectione verticali vis resistentiæ cum eodem semper pondere reluctetur, attamen ob brachium vectis, cui pondus

dus

us concipitur applicatum, momentum illius ponderis decrefcit per prismatis longitudinem in ipsâ longitudinis ratione; nec proinde eandem ubique rationem fervat cum momento refiftentiæ, quod propter æqualem prismatis craffitiam manet in omni fectione idem, & immutatum.

Poffunt autem plura folida reperiri, quæ confiderata velut gravitatis expertia fint æqualis ubique refiftentiæ, quum horizontaliter fufpenfa pondus fufinent ab eorum extremitate pendens. Hujusmodi eft cuneus

FIG. 43. rectilineus ABCDEF dorfo fuo parieti affixus; cujus facies triangulares ADE, BCF horizontem refpiciunt. Nam fi aliquo in loco fiat fectionis verticalis GHIK, cujus centrum gravitatis fit L; ex oftendis momentum refiftentiæ in loco illo erit, ut fectionis ipfa GHIK ducta per altitudinem ML, adeoque, quia fectionis GHIK eft parallelogrammum datæ altitudinis, cujus femiffis eft ML; erit idem momentum refiftentiæ, ut fola basis parallelogrammi GK, quæ datam fervat rationem cum ME. Sed momentum ponderis, quod pendet ex cunei extremitate, eft ut brachium vectis ME, cui concipitur pondus applicatum. Itaque momentum refiftentiæ in fectione GHIK datam fervat rationem cum momento ponderis; & propterea, quum eadem
fit

fit demonstratio in omni aliâ sectione, erit cuneus rectilineus $ABCDEF$ æqualis ubique resistentiæ.

Hujusmodi est etiam cuneus parabolicus $ABCDEF$ ejusdem ubique crassitie, in quo AF , sive DE est axis parabolæ BF , sive CE . Nam si aliquo in loco fiat sectio verticalis $GHIK$, cujus centrum gravitatis sit L ; erit momentum resistentiæ in loco illo, ut sectio ipsa $GHIK$, multiplicata per altitudinem ML : adeoque, quia sectio $GHIK$ est parallelogrammum, cujus basis est data; erit idem momentum resistentiæ, ut rectangulum NML , sive etiam ut MN quadratum, quod ob naturam parabolæ datam servat rationem cum MO . Sed momentum ponderis, quod ex cunei extremitate pendet, est ut brachium vectis MO , cui concipitur pondus applicatum. Quare momentum resistentiæ in sectione $GHIK$ erit in datâ ratione cum momento ponderis; adeoque, quum eadem sit demonstratio in omni aliâ sectione, erit cuneus parabolicus $ABCDEF$ æqualis ubique resistentiæ.

FIG. 44.

Tale quoque est solidum ABC , ortum ex revolutione primæ parabolæ cubicæ CA circa axem suum CD , cujus ea est natura, ut cubi ordinatarum AD , EG sint ut abscissæ correspondentes CD , CG . Nam factâ quocumque in loco sectione verticali EHF , quia

FIG. 45.

O

cen-

centrum suæ gravitatis est punctum G ; erit momentum resistentiæ in loco illo, ut sectio ipsa EHF , multiplicata per ordinatam EG : adeòque, quia sectio EHF , velut circularis, est ut quadratum ejusdem EG ; erit idem momentum resistentiæ, ut cubus ex EG , qui ob naturam assumptæ parabolæ datam servat rationem cum CG . Jam verò momentum ponderis, quod pendet ex solidi extremitate, est ut brachium vectis CG , cui concipitur pondus applicatum. Itaque momentum resistentiæ in sectione EHF datam servat rationem cum momento ponderis; atque adeò, quum eadem sit demonstratio in omni aliâ sectione, erit solidum ABC ubique æqualis resistentiæ.

Sed consideratâ gravitate in ipso solido, possunt etiam nonnulla inveniri, quæ suspensa horizontaliter sint æqualis ubique resistentiæ. Hujusmodi est cuneus parabolicus **FIG. 46.** $ABCDEF$, quem suppono esse complementum illius, de quo paulò ante locuti sumus. Nam factâ quocumque in loco sectione verticali $GHIK$, si L sit centrum suæ gravitatis, erit momentum resistentiæ in loco illo, ut sectio ipsa $GHIK$, ducta per altitudinem ML , hoc est ob datam GK , ut rectangulum NML , vel etiam ut MN , sive GH quadratum. Sed posito, quod P sit centrum gravitatis portionis ex cuneo abscissæ $GHIKEF$,
& de-

& demisso perpendiculo PQ , momentum illius portionis est, ut portio ipsa multiplicata per MQ , hoc est ob datam GK , ut factum ex superficie FGH in MQ , vel etiam ut quadrato-quadratum ex FG ; quum tam MQ cum FG , quàm superficies FGH cum cubo ipsius FG ob naturam parabolæ datam fervet rationem. Itaq; momentum resistentiæ in sectione $GHIK$ erit ad momentum portionis abscissæ $GHIKEF$, ut quadratum ex GH ad quadrato-quadratum ex GF , sive etiam ut GH ad GF quadratum; adeoque ob parabolæ naturam in datâ ratione.

Ejusdem naturæ est solidum ABC , ortum ex revolutione parabolæ Apollonianæ CA circa rectam CD , quæ eam contingit in vertice principali. Nam factâ quocumque in loco sectione verticali EHF , quia centrum suæ gravitatis est punctum G , erit momentum resistentiæ in loco illo, ut sectio ipsa EHF , multiplicata per EG ; hoc est, ob sectionem circularem, ut cubus ipsius EG . Sed posito, quod I sit centrum gravitatis portionis ex solido abscissæ $EHFC$, momentum ejus portionis est, ut portio ipsa multiplicata per GI ; hoc est, ut sectio EHF multiplicata per rectangulum CGI ; sive etiam, ut factum ex EG quadrato in CG quadratum, quum propter parabolæ naturam GI datam fervet rationem cum GC . Quare momen-

FIG. 47.

tum resistantiæ in sectione EHF erit ad momentum portionis ex solido abscissæ EHFC, ut cubus ex EG ad factum ex EG quadrato in CG quadratum; hoc est, ut EG ad CG quadratum; adeoque, ob parabolæ naturam, in datâ ratione.

FIG. 41. Tale etiam est solidum ejusdem ubique altitudinis, quod habet pro basi suâ horizontali spatium logarithmicum infinitum (sive potius infinitè longum) ADEC. Nam si hujusmodi solidum secetur verticaliter secundum aliquam logarithmicæ ordinatam BF; ob eandem ejus altitudinem, erit momentum resistantiæ in sectione illâ, ut ordinata ipsa BF, & momentum portionis abscissæ, ut spatium infinitum BFEC, multiplicatum per distantiam sui centri gravitatis ab ordinatâ BF. Jam verò observatum est à Christiano Hugenio, distantiam istam æqualem esse subtangententi OF, quæ est constantis longitudinis. Itaque momentum resistantiæ in factâ sectione erit ad momentum portionis ex solido abscissæ, ut ordinata BF ad spatium infinitum BFEC; adeoque in ratione datâ, quum eidem curvæ logarithmicæ hoc etiam accadat, ut spatium quodvis infinitum BFEC, veluti duplum trianguli BOF, sit semper ut ordinata correspondens BF.

Atque hæc de solidis, quæ ita quidem hori-

horizontaliter suspenduntur, ut una extremitas alicubi sit affixa, altera liberè pendeat. Ponamus modò solidum ABCD, quod FIG. 48. semper homogeneous intelligi debet, utrâque sui extremitate inniti duobus fulcimentis A, & D; jamque si centrum suæ gravitatis sit in plano sectionis verticalis EFG, concipi poterit tota solidi resistentia veluti collecta, & coacervata in ipsâ sectione EFG: proindeque definietur per eandem sectionem EFG ductam in solidi longitudinem AD. Unde si M sit sectionis centrum gravitatis, existens in lineâ verticali FN, momentum ejusdem resistentiæ habebitur, multiplicando sectionem EFG primò per longitudinem solidi AD, & deinde per rectam MN.

Et quoniam in eâdem sectione EFG colligitur etiam, & coacervatur tota solidi gravitas; manebunt omnia in eodem statu, si solidum concipiatur expers omnis gravitatis, & ex puncto F suspendatur pondus P tantundem gravitans, quantum solidum ipsum. Jam verò pōdus P impetum facit adversùs resistentiam, non modò vi suâ absolutâ, verùm etiam tam propter distantiam ejus à fulcimento A, quàm propter distantiam à fulcimento D. Quare momentum solidi ABCD innixi utrâque sui extremitate fulcimentis A, & D habebitur, multi-

plicando pondus ejus absolutum P primò per distantiam unam AF , & deinde per distantiam alteram DF .

Jam sectio EFG in designando momento resistentiæ idem præstat, ac maximum pondus, quod solidum verticaliter suspensum sectione illâ potest sustinere. Quocirca si supponamus, P esse maximum pondus, quod sustinere potest, dum innititur fulcimentis A , & D ; erit primum pondus ad secundum, ut rectangulum AFD ad rectangulum ex AD in MN . Ex quo facile colligi potest, quod si solidum $ABCD$ habeat figuram prismatis, ita ut secta sit bifariam tam altitudo FN in puncto M , quàm longitudo AD in puncto F , maximum pondus, quod sustinere posset prisma suspensum verticaliter, sit ad maximum pondus, quod sustinet innixum fulcimentis A , & D , ut est longitudo prismatis dimidiata ad ejus altitudinem.

Quum solidum $ABCD$ innititur duobus fulcimentis A , & D , consideraturque velut expers omnis gravitatis; erit illud æqualis ubique resistentiæ, si factâ ubicumque sectione verticali EFG reperiatur, quod momentum resistentiæ in hac sectione datam servet rationem cum momento alicujus ponderis P , pendentis ex infimo sectionis puncto F . Hinc, quia in omni sectione verticali

ticali EFG, cujus centrum gravitatis est punctum M, momentum resistentiæ est, ut sectio ipsa multiplicata per rectam MN, & in quolibet puncto F momentum dati ponderis P est, ut rectangulum AFD; erit solidum ABCD æqualis ubique resistentiæ, si quælibet sectio verticalis EFG multiplicata per rectam MN datam servet rationem cum rectangulo correspondente AFD.

Tale autem est solidum semicirculare, FIG. 49. vel etiam semiellipticum ejusdem ubique crassitie ABHCDE. Nam si aliquo in loco fiat sectio verticalis EFGH erit sectio ista parallelogrammum datæ basis: proindeque eadem sectio multiplicata per rectam MN, hoc est per distantiam centri suæ gravitatis à rectâ EH, erit ut EF quadratum. Sed ob circuli, vel ellipsis proprietatem EF quadratum est, ut rectangulum AFD. Quare ex æquali sectio EFGH, multiplicata per rectam MN, datam habebit rationem cum rectangulo AFD; & propterea ex ostensis ipsum solidum ABHCDE erit æqualis ubique resistentiæ.

Tale etiam est solidum ANDF, quod gi- FIG. 50. gnet revoluta circa rectam AD ellipsis altera AND talis naturæ, ut cubus cujusque ordinatæ MN sit, ut rectangulum AMD ex correspondentibus ipsius AB portionibus contentum. Nam si aliquo in loco fiat se-

sectio verticalis EFGN, erit sectio ista, velut circularis, ut quadratum ordinatæ MN; adedq; eadem sectio EFGN multiplicata per MN erit, ut cubus ipsius MN. Sed ex hypothesis cubus ordinatæ MN est, ut rectangulum AMD. Igitur ex æquali data erit ratio, quam sectio EFGN multiplicata per MN habet ad rectangulum AMD: proindeque ipsum solidum ANDF erit ubique æqualis resistentiæ.

FIG. 51.

Aliud solidum æqualis etiam ubique resistentiæ suppetit nobis præclara illa proprietas parabolæ Apollonianæ à Pappo primum indicata: nimirum, quod si ABD sit parabola ista, cujus axis recta BC, & basis recta AD, quælibet ad basim demissa perpendicularis EF proportionem respondeat rectangulo AFD, utpote quæ multiplicata per parametrum axis, rectangulum constituat æquale ipsi AFD. Hinc enim patet, solidum æqualis altitudinis constitutum super ABDA esse ubiq; æquè resistens, quum innititur punctis A, & D, velut fulcimentis; quandoquidem factâ in aliquo loco sectione verticali EFGH, erit sectio ista parallelogrammum datæ altitudinis; atq; aded eadem sectio multiplicata per MN, distantiam sui centri gravitatis à rectâ GH, erit semper, ut basis EF, & consequenter ut rectangulum AFD. Idemq; erit, si descriptâ ex alterâ parte para-

parabolâ aliâ ABD , quæ sit similis, & æqualis ipsi ABD , constituatur super totâ figurâ planâ ABD solidum æqualis altitudinis, quod cylindrum parabolicum facile vocabis.

In totâ hac doctrinâ de resistantiâ solidorum, horizontaliter suspensorum, illud tacite cum Galilæo supposuimus, quod eadem illa vis resistantiæ, quæ ponderi reluctatur, quum solidum suspenditur verticaliter, agat etiam in pondus, licet brachio alicujus vectis applicata, in suspensione horizontali. Sed considerarunt Clarissimi Viri Leibnitius, & Mariottus fieri posse, ut id nequaquam sit verum; quia etsi in utrâque suspensione idem semper sit nexus partium, fieri tamen potest, ut fibræ sectionis, in qua vim resistantiæ consideramus, non ita æqualiter tendantur in suspensione solidi horizontali, quàm, quum idem solidum suspenditur verticaliter: quod utique si verum esset, vis resistantiæ, quæ agit in pondus, non erit eadem in utrâque suspensione.

Fibras namque solidi suspensi extensibiles esse, & capaces tensionis; id utique naturalis suadet ratio, quotidiana confirmat experientia. Huic autem consequens est, easdem fibras eò magis resistere, quò majorem tensionem patiuntur; nec ubi resistunt, omnem suam vim adhibere, nisi, quum ad
ulti-

ultimum tensionis gradum pervenerint. Jam, quotiescumque solidum suspenditur horizontaliter, ratione hypomochlii, quod locum habet in hac suspensione, vires fibras tendentes eò majores sunt, quò magis fibræ ipsæ recedunt ab hypomochlio. Unde in hypothefi, quod tensiones proportionales sint viribus tendentibus, erunt tensiones ipsarum fibrarum inter se in eadem distantiarum ratione; atque adeò in hac eadem ratione erunt etiam vires, quibus singulæ illæ fibræ resistunt.

Fig. 52. Perspicuum est autem in hoc systemate, non modò vim resistantiæ designari non posse per sectionem, in qua vim illam consideramus, sed neque etiam centrum resistantiæ idem esse cum centro gravitatis ipsius sectionis. Quocirca, ut utrumque determinemus, sit CAC sectio solidi, cujus basis CC sit hypomochlium, & axis AB radius, qui in solidi fractione motum regit circula-rem. Designet idem axis AB tensionem, ad quam perveniunt fibræ omnes exeuntes ex base CC , & describatur figura alia DBD talis naturæ, ut ductâ ex quolibet axis puncto M ordinatâ MON sit semper, ut MN ad MO , ita AB ad BM . Dico vim resistantiæ, quæ exercetur in sectione CAC in hypothefi tensionum æqualium, esse ad vim resistantiæ, quæ in eadem exercetur sectione, quum tensiones

nes fibrarum proportionem correspondent earundem distantis ab hypomochlio CC, ut est sectio ipsa CAC ad novam figuram DBD.

Resistunt namque fibræ sectionis CAC proportionem tensionis. Itaque in hypothese, quod tensiones fibrarum proportionales sint distantis ipsarum ab hypomochlio CC, vis resistentiæ fibrarum, exeuntium ex ordinatâ aliquâ NN, habebitur multiplicando ordinatam illam per BM, five etiam OO per AB: ex quo facile erit inferre, vim resistentiæ totius sectionis in eadē hypothese haberi, multiplicando figuram totam DBD per AB. Jam verò, quum singulæ fibræ tantam patiuntur tensionem, quantam subeunt fibræ exeuntes ex base CC, habetur vis resistentiæ totius sectionis, multiplicando sectionem ipsam per AB. Itaque vis resistentiæ, quæ exercetur in sectione CAC in hypothese tensionum æqualium, erit ad vim resistentiæ, quæ exercetur in eadem sectione in hypothese, quod tensiones proportionales sint distantis ab hypomochlio, ut est sectio CAC ad figuram DBD.

Hinc si vis resistentiæ, quæ exercetur in sectione CAC in hypothese tensionum æqualium, designetur per sectionem ipsam CAC; designabit figura DBD vim resistentiæ ejusdem sectionis, quum tensiones fibrarum proportionem correspondent distantis suis

suis ab hypomochlio CC. Et quoniam ordinatæ figuræ DBD habent inter se eandem rationem, ac vires, quibus resistunt fibræ exeuntes ex ordinatis correspondentibus sectionis CAC; erit punctum, in quo omnes istæ vires colliguntur, & coacervantur, idem omninò cum centro gravitatis figuræ DBD: proindeque quemadmodum, quum tensiones sunt æquales, momentum resistentiæ, quæ exercetur in sectione CAC, designatur per productum ex sectione ipsâ in distantiam centri suæ gravitatis ab hypomochlio CC; ita, quum tensiones proportionales sunt distantis ab hypomochlio isto, momentum ejusdem resistentiæ definietur per productum ex figurâ DBD in distantiam sui centri gravitatis ab eodem hypomochlio.

FIG. 52.

Ex eo autem, quod figura DBD sit talis naturæ, ut ductâ ex quolibet axis puncto M ordinatâ MON, sit semper, ut MN ad MO, ita AB ad BM, duo colligi possunt, si eorum recordemur, quæ superius ostensa sunt de methodo determinandi centrum gravitatis in figuris regularibus, & de centro percussionis. Primum, quod si sectionis CAC sit H centrum gravitatis, sectio CAC habeat ad figuram DBD eandem rationem, quam habet AB ad BH. Et alterum, quod si punctum K sit centrum gravitatis figuræ DBD,

DBD, idem sit etiam centrum percussionis in sectione CAC, quotiescumque circa basim suam CC movetur circulariter. Unde in hypothese quod tensiones fibrarum proportionales sint distantis suis ab hypomochlio CC, etiam non descripta figura DBD, definiri poterit, tam vis resistentiae, quae exercetur in sectione CAC, quam momentum ipsius.

Nam primò si centrum gravitatis sectionis CAC sit punctum H, definietur vis resistentiae, multiplicando sectionem CAC per BH, & dividendo productum per AB. Et secundò si ejusdem sectionis CAC, quum circa basim suam CC circulariter movetur, sit K centrum percussionis, definietur momentum ejusdem resistentiae, multiplicando per BK quotientem, qui oritur ex illa divisione. Unde si solidum, ad quod referatur sectio CAC, habeat figuram prismatis, designando momentum ponderis per factum ex pondere ipso in longitudinem prismatis, habebitur momentum resistentiae, multiplicando per BK ipsam sectionem CAC: ex quo haud difficile erit inferre, maximum pondus, quod sustineret prisma in suspensione verticali, esse ad maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, ut est longitudo prismatis ad BK.

Hinc siquidem basis prismatis, sive sectio
CAC

CAC sit parallelogrammum, erit ejus centrum percussionis K idem omninò cum centro percussionis axis AB: proindeque ex superius ostensis continebit BK duas tertias partes ipsius AB; atque adeò maximum pondus, quod sustineret prisma suspensum verticaliter, erit ad maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, ut est longitudo prismatis dimidiata ad tertiam partem suæ altitudinis. Unde si porrò supponamus longitudinem prismatis duplam esse suæ altitudinis; maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, non dimidia, ut in hypothese tensionum æqualium, sed tertia pars erit ejus, quod sustineret in suspensione verticali.

Itaque in hypothese, quod tensiones fibrarum sectionis CAC proportionales sint distantis ipsarum ab hypomochlio CC, ad definiendum momentum resistentiæ, multiplicare oportet sectionem CAC, non modò per rectam BH, quæ est distantia centri suæ gravitatis ab hypomochlio illo, verùm etiam per rationem, quam distantia centri percussionis ab eodem hypomochlio BK habet ad altitudinem sectionis AB. Unde facilè colligi potest, eadem illa solida, quæ ostensa sunt æqualis resistentiæ in hypothese tensionum æqualium, esse etiam æquè resistentia in hac aliâ hypothese; quandoquidem in omnibus

iis

iis solidis data est ratio, quam habet BK ad AB.

In eâdem doctrinâ de resistantiâ solidorum horizontaliter suspensorum alia se se obtulit contemplatio Acutissimo Viro Jacobo Bernoullio: nimirum fieri posse, ut non omnes fibræ sectionis, in qua vim resistantiæ consideramus, tendantur, sed superiores quidem tensionem, inferiores verò pressionem patiantur. Sanè dubitari non potest, quin hæc hypothesis sit longè verisimilior utrâque præcedentium; sed de cætero idem exinde colligitur, ac ex hypothesis, quod omnes fibræ tēdantur. Nam, ut ipsemet Bernoullius observavit in Schediasmate, quod inseruit monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1705., eadem vis, quæ flectit, ex gratiâ, rectangulum ABCD ex AB in GF, tendendo fibras superiores quantitate trianguli BSF, & comprimendo inferiores quantitate trianguli ASG, poterit super puncto A tamquam hypomochlio tendere fibras omnes quantitate trianguli BAE.

FIG. 53.

In hanc considerationem descendit Vir Clarissimus, facem præeunte Nobilissimo Christiano Hugenio, qui ei illud opposuit, dum curvaturam laminæ elasticæ erudito orbi impertivit, ut constet ex Actis Lipsien-sibus anni 1695. Supposuit namque Bernoullius, quod ubi superficies laminæ ex-

te-

terior extenditur, interior maneat eadem, & immutata, ita ut unumquodque punctum ejus sumi possit pro hypomochlio vestris, quo mediante agunt in se mutuo vis tendens, & pondus laminam inflectens. Sed objecit Hugenus, verisimile esse, non tantum superficiem externam extendi, verum etiam contrahi internam: cui ultro adhæsit Bernoullius, quia quicquid extensionis, id etiam compressionis capax esse debet.

Hinc itaque suborta Bernoullio elegans illa consideratio, quod in solidis horizontaliter suspensis, superiores quidem fibræ extendantur, inferiores verò comprimantur, & contrahantur. Sed hoc ipsum eum nudavit ad contemplationem novi cujusdam centri, de quo nemo adhuc cogitaverat. Nam, quum fibræ superiores extensionem, compressionem inferiores patiantur; aderit procul dubio inter eas fibra aliqua, quæ nec tensionem subibit, nec pressionem. Quocirca punctum sectionis, ex quo egreditur fibra ista, centrum tensionis Vir acutissimus vocitavit; veluti est punctum S in in rectangulo ABCD, quotiescumque ex AB

FIG. 53. flectitur in GF.

Patet autem, punctum istud S facili negotio determinari inventâ ratione, quam habet BS ad AS, sive BF ad AG aut etiam triangulum BAF ad triangulum BAG. Sed ad

ad hanc rationem inveniendam, considera-
re prius oportet, quod sicuti vis, quæ ten-
dit fibras superiores quantitate trianguli
BSF, potest super puncto A, velut hypomo-
chlio, tendere fibras omnes quantitate trian-
guli BAF; ita vis, quæ comprimit fibras
inferiores quantitate trianguli ASG, possit
super puncto B, tamquam hypomochlio, com-
primere fibras omnes quantitate trianguli
BAG. Hinc enim sequitur, quod eadem vis,
quæ tendit super puncto A fibras omnes
quantitate trianguli BAF, potis sit etiam
comprimere easdem fibras super puncto B
quantitate trianguli BAG: proindeque in
hypothesi, quod fibræ tantundem compri-
mantur per aliquam vim, quantum per
eandem extenduntur, fiet semper triangu-
lum BAF ad triangulum BAG in ratione æ-
qualitatis.

Atque hinc retinentes eandem hypothe-
sim, cognoscemus, curvaturam laminæ elasti-
cæ eandem semper prodire, sive superficies
ejus interior, & concava contrahatur, sive
non. Nam in hypothesi, quod interna la-
minæ superficies contractionem patiatur,
non aliud novi inducitur, quàm quod hy-
pomochlium vectis, quo mediante agunt
in se mutuò vis tendens, & pondus lami-
nam inflectens, non jam in superficie illâ,
sed in ipsâ laminæ crassitie debeat conside-
rari.

rari . Quocirca semper, ac centrum tensionis in medio rectæ lineæ, laminæ crassitiem designantis , reperitur ; erit locus omnium istorum hypomochliorum linea , quæ bisecat laminæ crassitiem ; adeoque illam eandem curvaturam , quam habet linea ista , habebunt quoque ambæ laminæ superficies, quæ ei sunt parallelæ.

Vires tendentes proportionales esse ipsis tensionibus , suadet non parum axioma illud metaphysicum, quod causæ effectibus , quos producant proportionem semper respondeant . Sed laudatus Jacobus Bernoullius arbitratur, hanc legem tensionum nequaquam posse à naturâ observari , eâ nempe ratione , quia tensiones non ita augeri possunt in infinitum , quemadmodum ipsæ vires tendentes : unde hoc etiam in resistantiâ solidorum horizontaliter suspensorum mutandum esse judicavit . Verum etsi persuasum habeam, nullam constantem tensionum legem in naturâ observari , sed eam pro diversâ corporum texturâ diversam existere ; nihil tamen obstat , quominus assumamus, vires tendentes tensionibus proportionem correspondere; nam quod tensio debeat esse infinita , quum ipsa vis tendens infinita pariter ponitur , id equidem cum infinitâ divisibilitate materiæ nequaquam pugnat.

C A P. VIII.

De legibus motuum, quæ in mutuâ corporum collisione observantur.

Postremum, quod in artificiosâ corporum latione considerandum nobis occurrit, sunt leges motuum, quæ in mutuâ eorum collisione debent observari. Legum istarum basis, & fundamentum sunt hæc duo theoremata. Primum, quod quantitas motus, quæ producitur, capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutetur ab actione corporum inter se. Alterum, quod eadem quantitas motus, quæ ratione illâ producitur, æqualis sit ei, qui oriretur, si utrumque corpus moveretur velocitate communis centri gravitatis.

Horum theorematum rationem reddere, haud arduum erit. Nam quantum ad primum, quia actio, & reactio sunt semper æquales, & contrariæ; necesse est, ut illæ æquales item mutationes efficiant in motibus versùs contrarias partes. Itaque, si motus fiant ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur ex motu corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem, quæ prius. Si verò cor-

pora sibi mutuò obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusque; adeòque differentia motuum factorum ad contrarias partes adhuc manebit eadem.

FIG. 54.

Quantum ad secundum, sint A , & B corpora duo, quorum commune centrum gravitatis sit C . Moveantur primum ad eandem partem, & pergant eodem tempore ad puncta a , & b , in qua positione sit c commune centrum gravitatis eorundem. Et quoniam longitudines Aa , Bb , Cc eodem tempore describuntur à punctis A, B, C ; designabunt longitudines illæ velocitates eorum punctorum. Unde patebit, summam motuum utriusque corporis æqualem esse ei, qui oriretur, si utrumque moveretur velocitate communis centri gravitatis; siquidem ostendi possit pondera corporum A , & B ducta in ipsas Aa , Bb tantundem efficere, quantum si utrumque simul duceretur in Cc .

Id autem ostendemus in hunc modum. Concipiatur super rectâ AB normaliter insistere planum aliquod DE . Itaque per ea, quæ superiùs ostensa sunt de communi centro gravitatis quocumque ponderum, erunt tam facta ex ponderibus corporum A , & B in distantias AD , BD æqualia ei, quod fit multiplicando utrumque pondus per CD , quàm facta ex iisdem ponderibus in distantias

tias

tias aD , bD æqualia ei, quod oritur, multiplicando utrumque pondus per CD . Unde subducendo terminos secundæ æqualitatis ordine ex terminis primæ, supererunt facta ex ponderibus corporum A , & B in ipsas Aa , Bb æqualia ei, quod fit, multiplicando utrumque pondus per Cc .

Sed eadem corpora A , & B , quorum Fig. 55. commune centrum gravitatis est C , moveantur secundò ad partes contrarias, & pergant eodem tempore ad puncta a , & b , in qua positione sit c ipsorum commune gravitatis centrum. Itaque longitudines Aa , Bb , Cc , velut descriptæ eodem tempore à punctis A , B , C , designabunt adhuc velocitates eorum punctorum. Quare patebit, differentiam motuum utriusque corporis æqualem esse ei, qui oriretur, si utrumque moveretur velocitate communis centri gravitatis, siquidem ostendi possit, pondera corporum A , & B ducta in ipsas Aa , Bb talia facta producere, ut differentia eorum factorum æqualis sit ei, quod fit, multiplicando utrumque pondus per Cc .

Id verò ostendetur hac ratione. Conci-
piatur super rectâ AB ad rectos angulos in-
sistere planum aliquod DE . Igitur ex iis,
quæ superius ostensa sunt de communi cen-
tro gravitatis quocumque corporum, erunt
tam facta ex ponderibus corporum A , & B

in distantias AD , BD æqualia ei, quod fit, multiplicando utrumque pondus per CD , quàm facta ex iisdem ponderibus in distantias aD , bD æqualia ei, quod oritur multiplicando utrumque pondus per cD . Quare subducendo terminos secundæ æqualitatis ordine ex terminis primæ, remanebit differentia factorum ex ponderibus corporum A , & B in ipsas Aa , Bb æqualis ei, quod fit, multiplicando utrumque pondus per Cc .

Sed videamus modò, qua ratione horum theorematum beneficio determinari possint leges motus in mutuo corporum congressu. Hunc in finem distinguenda sunt prius duo corporum conredientium genera; unum nempe eorum, quæ vim habent elasticam, per quam compressa resiliunt; alterum illorum, quæ tali vi sunt penitus destituta, qualia fortè in rerum naturâ sunt nulla. Prioris generis corpora dici possunt elastica, sive actiuosa; ea verò, quæ sunt alterius generis, inertia sive otiosa appellabimus. Nec equidem confundenda sunt inter se duo ista corporum genera; quandoquidem aliæ sunt leges motus in congressu corporum inertium, aliæ in collisione corporum elasticorum.

Itaque quantum ad corpora inertia, si supponamus ea ab omnibus aliis ita esse di-
visa,

visa, ac sejuncta, ut eorum motus à corporibus adjacentibus nec juventur, nec impediantur, eadem post occursum unà cum communi gravitatis centro junctim movebuntur. Neque enim corpus fugiens tardius moveri potest, quàm corpus insequens; quia sic impedimento esset motui corporis insequentis, atque aded de velocitate istius aliquid semper exciperet, usque donec æquè velocia redderentur. Neque etiam moveri potest celerius, quia id, quod temperat, & gubernat motum ejus, est corpus insequens.

Ex eo autem, quod corpora inertia post occursum unà cum communi gravitatis centro junctim moveantur, perspicuum est corpora illa post impactum eadem planè velocitate moveri, qua commune fertur ipsorum gravitatis centrum. Jam velocitas communis centri gravitatis duorum corporum à mutuâ earum actione non mutatur. Nam ex primo theoremate quantitas motus, quæ producitur, capiendò summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, eadem manet post occursum, quæ erat & ante. Sed huic motus quantitati æqualis est illa, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Itaque hæc alia motus quantitas eadem quoque

semper perseverat : quod profectò fieri non potest, nisi velocitas communis centri gravitatis post actionem corporum maneat eadem, & invariata.

Quum igitur commune centrum gravitatis duorum corporum eandem retineat velocitatem tam ante, quàm post occursum, movebuntur corpora inertia post impactum eadem velocitate, qua commune centrum gravitatis ipsorum ante ferebatur. Unde, quia per theorema secundum velocitas ista tanta est, ut si eâ utrumque corpus moveretur, eadem oriretur motus quantitas, quæ producitur, capiendò summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias; invenietur velocitas, qua corpora inertia junctim moventur post occursum, si summa motuum factorum ad partem eandem, vel differentia factorum ad partes contrarias per pondus utriusque corporis dividatur.

Ponamus itaque, corpus A duplum habere pondus respectu corporis B, & quod ea ad eandem partem subinde moveantur, ut corpus insequens A septem habeat velocitatis gradus interea, ac fugiens B uno tantum gradu movetur. Et quoniam corporis A quatuordecim sunt gradus motus, dum alterum B uno tantum motus gradu agitur; erit summa motuum ad eandem partem

gra-

graduum quindecim. Unde, quia numerus ternarius designat pondus utriusque corporis simul, dividendo 15 per 3, designabit quotiens 5 velocitatem utriusque corporis post occursum: & propterea, quum utrumque corpus quinque gradibus velocitatis feratur post occursum; erunt corporis A decem gradus motus, & corporis B quinque similiter post impactum.

Habeat corpus A duplum pondus respectu corporis B, sed ponamus B quiescere interea, ac alterum A sex gradibus velocitatis movetur versus ipsum. Et quoniam dum B quiescit, alterum A duodecim habet gradus motus; erit summa motuum utriusque corporis similiter graduum duodecim. Unde, quia pondus utriusque corporis simul hic etiam per numerum ternarium designatur; dividendo 12 per 3 exhibebit quotiens 4 velocitatem utriusque corporis post occursum: proindeque, quia utrumque corpus post occursum fertur quatuor gradibus velocitatis; erunt corporis A octo gradus motus, & corporis B quatuor post mutuam ipsorum collisionem.

Ponamus denique eadem corpora A, & B sibi mutuò obviam ire, sed ita tamen, ut corpus A septem habeat gradus velocitatis interea, ac alterum B duplici tantum gradu movetur. Et quoniam motus corporis A est

A est graduum quatuordecim, dum alterum B duos dumtaxat habet gradus motus; erit differentia motuum factorum ad contrarias partes graduum duodecim. Sed pondus utriusque corporis simul designatur per numerum ternarium. Itaque dividendo 12 per 3, dabit quotiens 4 velocitatem utriusque corporis post impactum: & propterea, quum ambo corpora A, & B quatuor gradibus velocitatis ferantur post occursum; erunt corporis A octo, & corporis B quatuor gradus motus post mutuam eorum collisionem.

Atque hæc quidem pro corporibus inertibus, sibi mutuò occurrentibus; videamus modò, qua ratione definiendæ sint leges motuum in occursum eorum corporum, quæ dicuntur elastica, sive actiosa. Et quoniã huiusmodi corpora illa sunt, quæ vim habent elasticam, qua agente compressa resiliunt; id primò videndum est, quid corporibus addat hæc vis elastica, & quem pariat effectum in ipso corporum congressu.

Nimirum quemadmodum corpora inertia post occursum debent eadem velocitate junctim moveri unà cum communi centro gravitatis ipsorum, quia nulla datur causa, per quam à se mutuò debeant separari; ita præcipuus elasticitatis effectus est, ut corpora conredientia à se mutuò æqualiter, hoc est æqualibus viribus resiliant, & di-

ver-

versis velocitatibus aliquando ad eandem, aliquando ad partes contrarias moveantur.

Sit enim corpus aliquod elasticum quiescens, & immobile, cujus superficies vi alterius corporis occurrentis introrsum comprimatur. Et quoniam statim, ac cessat vis comprimens, sive motus corporis occurrentis, alterum vi suâ insitâ elateris in pristinam figuram se restituet, & cum eâ vi urgebit corpus primum; reflectetur hinc corpus occurrens, vel eâdem omninò velocitate, quam priùs habebat, vel etiam datâ parte illius velocitatis. Sed si utrumque corpus sit elasticum, eo casu vis elastica in utroque corpore æqualiter aget, & æquales motus mutationes ad contrariam partem producet, propter eam naturæ legem, quod actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ.

Exinde autem, quod corpora elastica post occursum ratione elateris æqualibus viribus à se mutuò resiliant, facile erit leges congressuum pro corporibus elasticis unâ similiter regulâ definire. Si enim supponamus corpora esse perfectè elastica, hoc est eâdem vi resilire à se invicem, qua comprimuntur; jam utriusque velocitas post reflexionem ratione elasticitatis eadem erit cum illâ, qua accesserunt ad se mutuò, hoc est cum summâ suarum velocita-

cum,

tum, si movebantur ad plagas contrarias, cum differentiâ verò, si motus fiebant ad eandem plagam. Unde, quum à se invicem debeant æqualibus viribus resilire, dividenda erit ipsis hæc velocitas in reciproca suorum ponderum ratione: proindeque definientur leges congressuum pro corporibus perfectè elasticis, si præter illam velocitatem, qua junctim moverentur post occursum, si velut inertia considerentur, habeatur quoque ratio velocitatum, quibus ratione elasticitatis à se mutuò reflectuntur.

Verumtamen, ut generalis hæc regula meliùs intelligatur, non abs re erit, eam aliquibus exemplis illustrare. Itaque sint A, & B duo corpora perfectè elastica, & supponamus primò, corpus A ratione ponderis duplum esse corporis B, eademque ita quidem ad eandem partem moveri, ut corpus insequens A septem habeat velocitatis gradus interea, ac alterum B uno tantùm gradu movetur: aded, ut si corpora illa inertia essent, utrumque post occursum versus eandem quoque partem quinque gradibus velocitatis moveri debeat. Et quoniam velocitas, qua accedunt ad se mutuò, utpote æqualis differentiæ suarum velocitatum, est graduum sex; divisâ quidem eâ ipsis corporibus in reciproca suorum ponderum ratione, obtingent corpori A gradus duo,

+ id est,
velocitas
respectiva
va,

= velocitate respectiva

duo, & corpori B gradus quatuor velocitatis, iisque velocitatibus à se mutuò resilient. Unde jam, quia ipsa corpora A, & B propter regulam corporum inertium moventur quoque junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B cum quinque gradibus velocitatis; habebit post occursum corpus B novem gradus velocitatis, & corpus A tantummodò tres, iisque velocitatibus adhuc versus eandem partem movebuntur.

Supponamus secundò, quod corpus A sit quidem duplum corporis B ratione ponderis, sed tamen, ut ipsum corpus B quiescat interea, ac alterum A sex gradibus velocitatis movetur: aded, ut si corpora illa inertia essent, utrumque post occursum versus eandem partem quatuor gradibus velocitatis moveri debeat. Et quoniam velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuò, utpote illa eadem, qua corpus A impingit in aliud B, est graduum sex; divisâ quidem eâ ipsis corporibus in reciproca suorum ponderum ratione, habebit corpus A gradus duos, & corpus B gradus quatuor velocitatis, iisque velocitatibus à se mutuò resilient. Unde jam, quia ipsa corpora A, & B, propter regulam corporum inertium, movetur quoque junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, cum quatuor gradibus veloci-

locitatis ; erunt post occursum in corpore B octo gradus velocitatis , & in corpore A duo dumtaxat , eaque cum istis velocitatibus versus eandem quoque partem movebuntur.

Supponamus denique, quod eadē corpora A , & B moveantur ad partes contrarias, hoc est sibi mutuò obviam eant , A quidem gradibus septem , & B duplici tantum gradu velocitatis : ita ut si ea corpora inertia essent , utrumque post occursum versus eandem partem quatuor gradibus velocitatis moveri debeat . Et quoniam velocitas , qua accedunt ad se mutuò , utpote æqualis summae suarum velocitatum , est graduum novem ; divisâ quidem eâ ipsis corporibus in reciproca suorum ponderum ratione , obtinent corpori A gradus tres , & corpori B sex gradus velocitatis , iisque velocitatibus à se mutuò resilient. Unde jam, quia ipsa corpora A , & B , propter regulam corporum inertium , moventur quoque junctim versus eam partem , in quam resilit corpus B, cum quatuor gradibus velocitatis ; habebit post occursum corpus B decem gradus , & corpus A unicum dumtaxat gradum velocitatis , iisque velocitatibus versus eandem quoque partem movebuntur.

Iam in occursum corporum elasticorum illud , quod vel præcedit, quum motus sunt
ad

ad eandem partem, vel minorem habet quantitatem motus, quum fiunt ad plagas contrarias, vel denique quiescit, versus eam semper plagam movebitur post occursum, ad quam fieret motus ejus, si utique velut iners consideretur; sed non item corpus alterum, quippe quod modò versus plagam illam, modò versus partem contrariam moveri potest, quin etiam interdum manere potest quiescens, & immotum. Si enim velocitas, qua per vim elasticam reflectitur, minor sit velocitate, qua movetur ratione inertiae, ut evenit in omnibus allatis exemplis; non mutabitur directio ejus, sed perget adhuc moveri versus eandem plagam. Quod si verò fuerit major, mutabitur ejus directio, & tendet ad plagam contrariam. Ac denique si eidem fuerit æqualis, tunc ad neutram partem tendet, sed manebit quiescens, ac immotum.

Quum corpora conredientia A, & B non modò sunt perfectè elastica, verùm etiam pondera habent æqualia, leges suorum motuum sunt multò quidem simpliciores. Ponamus etenim primò moveri illa versus eandem partem, ita ut insequens A majorem habeat velocitatem, quàm fugiens B. Jamque si $2a$ sit velocitas corporis insequentis, & $2b$ velocitas corporis fugientis; erit

$2a \rightarrow 2b$ velocitas, qua corpora accedunt à se mutuò; adeòque ratione elasticitatis resilient à se invicem velocitate designatâ per $a \rightarrow b$. Unde, quum ratione inertiae moveri debeant junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, velocitate $a + b$; erit post occursum $a + b + a \rightarrow b$, hoc est $2a$ velocitas corporis B, & $a + b \rightarrow a + b$, hoc est $2b$ velocitas corporis A, iisque velocitatibus versus eandem quoque partem movebuntur. Ex quo patet, quod, quum corpora perfectè elastica ejusdem sunt ponderis, & versus eandem partem moventur, post occursum tendant ad eandem plagam velocitatibus permutatis.

Ponamus secundò, eadem corpora A, & B sibi mutuò obviam ire, ita ut major quoque sit velocitas in corpore A, quàm in corpore B. Jamque posito adhuc, quod $2a$ sit velocitas corporis A, & $2b$ velocitas corporis B; erit $2a + 2b$ velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuò: proindeque ratione elasticitatis resilient à se invicem velocitate designatâ per $a + b$: sed ratione inertiae moveri debent junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, velocitate $a \rightarrow b$. Quare post occursum erit $a + b + a \rightarrow b$, hoc est $2a$ velocitas corporis B, & $a + b \rightarrow a + b$, hoc est $2b$ velocitas corporis A, iisque velocitatibus ad contrarias quoque partes move-

ve-

vebuntur. Ex quo liquet, quod, quum corpora perfectè elastica ejusdem sunt ponderis, & sibi mutuò obviam eunt, post occursum moveantur ad plagas contrarias, velocitatibus permutatis.

Ponamus denique, quod corpus B quiescat interea, ac alterum A movetur versus ipsum velocitate designatâ per $2a$. Et quoniam velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuò, est $2a$; resiliunt illa à se invicem ratione elasticitatis velocitate designatâ per a . Jam verò ratione inertiae eadem corpora moveri debent junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, velocitate designatâ per eandem litteram a . Quare erit post occursum $a + a$, hoc est $2a$ velocitas corporis B, & $a - a$, hoc est nulla velocitas corporis A. Ex quo colligi potest, quod quum corpora perfectè elastica ejusdem sunt ponderis, & unum quiescit interea, ac alterum versus ipsum urgetur; post occursum velocitatem corporis moti excipiat corpus quiescens, ipsumque corpus, quod antea movebatur, maneat immotum.

Quum corpora sunt inertia, summa motuum factorum ad eandem partem, & differentia factorum ad partes contrarias, ut antea vidimus, per occursum corporum non mutatur. Sed non perinde res est, quum corpora sunt elastica; quandoquidem, ratio-

ne elasticitatis, quantitas illa motus augeri, & minui potest. Interim etiam in corporibus elasticis aliquid constantis, & immutabilis ante, & post occursum reperitur; nam id, quod efficitur, ducendo singulorum pondera in quadrata suarum velocitatum, simul additum, tantum erit post occursum, quantum erat & ante.

FIG. 54.

Sint enim duo quævis corpora elastica A, & B, quæ moveantur primum ad eandem partem, sitque A corpus insequens, & B corpus fugiens. Designent rectæ AB, AC pondera eorum corporum, & rectæ AD, AE velocitates eorundem, ita ut motus ipsorum ante occursum sint, ut rectangula BD, CE. Referat porrò AF velocitatem, qua utrumque corpus post occursum ratione inertiae junctim moveri debet. Itaque motus corporum post occursum, quum considerantur tamquam inertia, repræsentabuntur per rectangula BF, CF: proindeque per legem corporum inertium rectangula ista BF, CF simul sumpta ipsis BD, CE simul sumptis æqualia erunt.

Hinc, quum rectangulum DG æquale fiat rectangulo EH, erit ut DF ad FE, ita FH ad FG, sive AC ad AB. Quocirca, quia recta DE, quæ designat velocitatem, qua corpora accedunt ad se mutuo, subinde dividitur in puncto F, ut DF sit ad FE in reciproca ratione ipsa-

farum AB , AC , quæ pondera corporum designant; erunt DF , FE velocitates, quibus ratione elasticitatis moveri debent corpora A , & B post occursum: proindeque corpus fugiens B movebitur post impactum velocitate designatâ per summam rectarum AF , FE ; & corpus insequens A velocitate designatâ per differentiam rectarum AF , DF .

Ponatur jam $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $AE = d$, & $AF = e$. Erit igitur $DF = c - e$, & $FE = e - d$; atque adeò summa rectarum AF , FE erit $2e - d$, differentia rectarum AF , DF erit vel $2e - c$, vel $c - 2e$. Et quoniam rectæ AB , AC designant pondera corporum A , & B ; & rectæ AD , AE designant velocitates eorundem ante occursum: id, quod efficitur ducendo singulorum pondera per quadrata suarum velocitatum ante occursum, erit $acc + bdd$. Est autem post occursum summa rectarum AF , FE velocitas corporis B , & differentia rectarum AF , DF velocitas corporis A . Itaque id, quod fit, multiplicando eadem corporum pondera per quadrata suarum velocitatum post occursum, erit $4aee - 4ace + acc + 4bee - 4bde + bdd$.

Ex quo patet, eà rem redire, ut ostendamus, subsistere æqualitatem istam $acc + bdd = 4aee - 4ace + acc + 4bee - 4bde + bdd$, sive etiam, deletis quantitatibus, quæ se

mutuò destruunt, hanc aliam $4ade \div 4bee = 4ace \div 4bde$, quæ divisis terminis omnibus per $4e$, reducitur ad istam $ae \div be = ac \div bd$: id quod perspicuum est, quum rectangula BD, CE simul sumpta æqualia sint rectangulis BF, CF simul etiam acceptis.

FIG. 55.

Eadem corpora elastica A, & B sibi mutuò obviam eant, sitque in corpore A major quantitas motus. Designent quoque rectæ AB, AC pondera corporum A, & B, & rectæ AD, AE velocitates eorundem: ita, ut motus ipsorum ante occursum designentur per rectangula BD, CE. Referat porrò AF velocitatem, qua utrumq; corpus post occursum moveri debet junctim ratione inertia. Itaq; motus corporum post occursum, quum considerantur tamquam inertia, representabuntur per rectangula BF, CF: proindeque per legem corporum inertium rectangula ista BF, CF simul sumpta æqualia erunt excessui, quo rectangulum BD superat rectangulum CE.

Hinc, quum rectangulum DG æquale fiat rectangulo EH, erit ut DF ad FE, ita FH ad FG, sive AC ad AB. Quocirca, quia recta DE, quæ designat velocitatem, qua corpora accedunt ad se mutuò, subinde dividitur in puncto F, ut DF sit ad FE in reciproca ratione ipsarum AB, AC, quæ pondera corporum designant; erunt DF, FE velo-

locitates, quibus ratione elasticitatis moveri debent corpora A, & B post occursum: proindeque corpus B movebitur post impactum velocitate designatâ per summam rectarum AF, FE; & corpus A velocitate designatâ per differentiam rectarum AF, DF.

Ponatur jam $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $AE = d$, & $AF = e$. Erit igitur $DF = c - e$, & $FE = d + e$; atque aded summa rectarum AF, FE erit $d + 2e$, differentia verò rectarum AF, DF erit vel $2e - c$, vel $c - 2e$. Et quoniam rectæ AB, AC designant pondera corporum A, & B; & rectæ AD, AE designant velocitates eorundem ante occursum: id, quod efficitur, ducendo singulorum pondera per quadrata suarum velocitatum ante occursum, erit $acc + bdd$. Est autem post occursum summa rectarum AF, FE velocitas corporis B; & differentia rectarum AF, DF velocitas corporis A. Itaque id, quod fit, multiplicando eadem corporum pondera per quadrata suarum velocitatum post occursum, erit $4aee - 4ace + acc + bdd + 4bde + 4bee$.

Ex quo patet, eò rem redire, ut ostendamus, subsistere æqualitatem istam $acc + bdd = 4aee - 4ace + acc + bdd + 4bde + 4bee$, sive etiam deletis quantitatibus, quæ se mutuo destruunt, hanc aliam $4aee + 4bde + 4bee = 4ace$, quæ, divisis terminis

omnibus per 4^e, reducitur ad istam $ae + bd + be = ac$: id, quod perspicuum est, quum rectangula BF, CF simul sumpta æqualia sint excessui, quo rectangulum BD superat rectangulum CE.

FIG. 56.

+ pondera

Quod si unum ex corporibus quiescat, non dissimiliter res ostendetur. Designent etenim rectæ AB, AC ~~velocitates~~ corporum A, & B, & quiescat corpus B interea, ac alterum A movetur versus ipsum velocitate designatâ per rectam AD. Referat porrò AF velocitatem, qua corpora ratione inertiae moventur junctim post occursum. Et quoniam rectangula duo BF, CF simul sumpta æqualia sunt rectangulo BD, dempto communi BF, supererit rectangulum CF æquale rectangulo DG: adeòque, quum DF sit ad FA in reciproca ratione ipsarum AB, AC, & AD sit velocitas, qua corpora accedunt ad se mutud; designabunt rectæ DF, FA velocitates, quibus corpora resiliunt à se invicem ratione elasticitatis.

Hinc post occursum movebitur corpus B velocitate designatâ per duplum rectæ AF, & corpus A velocitate designatâ per differentiam rectarum DF, FA. Unde positis $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, & $AF = e$, erit $DF = c - e$; adeòque, quia id, quod fit multiplicando pondera corporum per velocitates ipsorum ante occursum, est acc ; & id, quod
fit

fit multiplicando eadem corporum pondera per velocitates eorundem post occursum, est $acc = 4ace + 4aee + 4bee$: res eò reducetur, ut ostendamus, subsistere æqualitatem istam $acc = acc - 4ace + 4aee + 4bee$, sive etiam hanc aliam $ae + be = ac$: id, quod perspicuum est; quum rectangula duo BF, CF simul sumpta æqualia sint rectangulo BD.

Ex ipsâ autem pulcherrimæ hujus proprietatis demonstratione, patet leges motuum in corporibus elasticis definiri posse, etiamsi non considerentur tamquam inertia. Nam primò, quum corpora A, & B moventur ad eandem partem, posito quod AD designet velocitatem corporis insequentis A, AE velocitatem corporis fugientis B, & AF velocitatem, qua utrumque corpus post occursum moveri debet junctim ratione inertæ; designabunt ex ostensis DF, FE velocitates, quibus resiliunt à se mutuo propter elasticitatem. Quocirca corpus fugiens B movebitur post occursum velocitate suâ AE, auctâ duplo ejus, qua resilit ratione elasticitatis; & corpus insequens A velocitate suâ AD, diminutâ duplo ejus, per quam resilit ratione elateris.

Secundò, quum corpora A, & B sibi mutuo obviam eunt, posito quod AD designet velocitatem corporis A, majorem quantita-

tem motus habentis, AE velocitatem alterius

rius corporis B, & AF velocitatem, quâ utrumque corpus post occursum moveri debet junctim ratione inertiae; erunt ex ostensis DF, FE velocitates, quibus resiliunt corpora à se mutuò propter elasticitatem. Unde similiter corpus B, in quo minor erat quantitas motus ante occursum, movebitur post impactum velocitate suâ AE, auctâ duplo ejus, qua resilit ratione elateris; & corpus A velocitate suâ AD, diminutâ duplo ejus, per quam resilit ratione elasticitatis.

FIG. 56. Denique, quum corpus B quiescit interea, ac alterum A movetur versus ipsum, posito, quod AD designet velocitatem corporis mobilis A, & AF velocitatem, qua utrumque corpus ratione inertiae moveri debet junctim post occursum; erunt ex ostensis DF, FA velocitates, quibus corpora propter elasticitatem resiliunt à se mutuò. Quare corpus quiescens B movebitur post occursum duplo ejus velocitatis, qua resilit ratione elasticitatis; & corpus mobile A perget moveri velocitate suâ AD, diminutâ duplo ejus, per quam resilit ratione elateris.

Itaque corpus illud, quod vel præcedit, quum motus fiunt ad eandem partem, vel minorem habet quantitatem motus, quum fiunt ad plagas contrarias, vel denique quiescit, movebitur post occursum velocitate

tate suâ ; auctâ duplo ejus, qua resilit ratione elateris ; vicissim verò corpus alterum perget moveri velocitate suâ , diminutâ duplo ejus , per quam resilit ratione elasticitatis . Unde corpus hoc alterum movebitur versus eandem plagam cum corpore primo, si factâ subductione, id quod remanet velocitatis sit positivum ; sed si utique fuerit negativum , tunc movebitur ad plagam contrariam ; & si denique nihil ex subductione illâ supersit , eo casu quiescet , & ad neutram partem movebitur.

Quum corpora sibi mutuò obviam eunt, posuimus semper quantitatem motus majorem esse in uno , quàm in altero . Sed fieri quoque potest , ut eadem sit in utroque corpore quantitas motus: nimirum si velocitatibus moveantur , quæ sint in reciproca suorum ponderum ratione . Jam hoc casu, si corpora sint inertia , necesse est , ut ambo quiescant post occursum ; quia differentia motuum ante collisionem est nulla . Unde etiam si fuerint perfectè elastica , movebuntur tantum velocitatibus , quibus resiliunt à se mutuò : proindeque lex occursum talis erit , ut reflectantur à se invicem iisdem velocitatibus, quibus ad se mutuò accesserunt.

In occursum corporum illud etiam tacitè supposuimus , ut corpora sint sphaerica , & directè sibi mutuò occurrant . Sed si corpora
vel

vel non sphaerica, vel diversis in rectis se moventia occurrant sibi invicem obliquè, & requirantur eorum velocitates post occursum; cognoscendus est situs plani, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus; deinde corporis utriusque velocitas resolvenda est in duas alias, unam huic plano perpendicularem, alteram eidem parallelam. Nam retentis velocitatibus parallelis, quippe quibus nequaquam corpora agunt in se mutuo; satis erit mutationes considerare, quæ ex velocitatibus perpendicularibus, & directè oppositis subnascuntur.

FIG. 57. Atque hac ratione facile erit ostendere, quod si corpus perfectè elasticum A incidat in firmum obicem DE obliquè secundum lineam AB, ab illo ita reflectatur secundum lineam BC, ut angulus reflexionis CBE æqualis sit angulo incidentiæ ABD. Etenim si compleatur rectangulum ADBF, & exponatur velocitas corporis incidentis per rectam AB, resolvetur ea in duas alias laterales, quas designabunt rectæ AD, AF. Sed corpus A per velocitatem AF nequaquam impingit in obicem, quum hæc velocitas urgeat corpus secundum lineam superficiiei obicis parallelam. Itaque omnis impactus fiet per velocitatem AD, sive BF, quæ urget corpus directè versus obicem. Jam verò,
quum

quum corpus sit perfectè elasticum, idem reflectitur post impactum eâdem omninò velocitate, qua in obicem impegit. Itaque si fiat BE ipsi BD æqualis, movebitur corpus post reflexionem velocitatibus BE, BF. Quare, completo rectangulo BECF, reflectetur per diagonalem BC, eritque aded angulus reflexionis CBE æqualis angulo incidentiæ ABD.

Patet autem, hanc legem in reflexione corporum observari, quotiescumque corpus, quod impingit in firmum obicem, ponitur perfectè elasticum, ita ut post impactum resiliat eâdem omninò velocitate, qua impegit in obicem. Sed longe secus res erit, si utique corpus perfectè elasticum non sit; quia eo casu angulus reflexionis minor sit semper angulo incidentiæ. Interim datâ ratione, quamvis comprimens habet ad vim resilientem, facile quoque erit lineam definire, per quam reflectitur corpus post impactum. Designet enim ut antea AD, sive BF vim comprimentem, hoc est velocitatem, qua corpus impingit in obicem, dum in eum obliquè incidit per rectam AB. Itaque si BG referat vim resilientem, hoc est velocitatem, qua resilit corpus ratione elateris; movebitur corpus post reflexionem velocitatibus BE, BG: proindeque, completo rectangulo BEHG, reflectetur per diagonalem BH, eritque

que angulus reflexionis HBE minor angulo incidentiæ ABD .

Hinc etiam id , quod superius assumpsimus , corpora elastica resilire à se invicem eâdem velocitate , qua accedunt ad se mutuò , locum sibi vindicat tantùm , quum corpora congradientia perfectè elastica sunt ; nam si utique perfectò isto elatere non gaudeant , velocitas , qua resiliunt à se mutuò , minor semper erit velocitate , qua ad se invicem accedunt . Unde rursus , ad definendas leges congressuum pro hujusmodi corporibus , nota esse debet ratio , quam in iis vis resiliens habet ad vim comprimentem . Ita , si vis resiliens fuerit ad vim , qua corpora comprimuntur , ut 2 ad 3 ; oportebit ratione elasticitatis dividere corporibus in reciproca suorum ponderum ratione , non quidem velocitatem totam , qua accedunt ad se mutuò , sed tantùm duas tertias partes illius .

Nonnulli erunt , quibus allatæ leges motuum vel ideò minus placebunt , quia cum regulis à Cartesio traditis pugnare videntur . Sed advertant velim , regulas suas deduxisse Cartesium ex duobus principiis , quæ cum ratione , & experienciâ pugnant omninò . Primum est , quod corpora propter quietem vim habeant ad resistendum . Alterum , quod in corporibus congradientibus eadem semper

per perseveret quantitas motus. Horum etenim utrumque falsum esse, liquidò patet. Non enim resistere possunt corpora propter quietem; quia vis in corpore mobili minuitur proportionaliter cum ipso motu, & corpora tunc demum quiescere dicuntur, quum omnem suum motum amittunt. Neq; etiam eadem semper perseverat in corporibus con-gredientibus quantitas motus; quandoquidem motus contrarii se mutuò destruunt, nisi per vim elasticam denuò nascantur.

Hinc falsum est etiam, quod contendunt Cartesiani, corpora resilire à se invicem non aliâ de causâ, quàm quia ratione obstaculi mutatur in corporibus directio ejus motus, qui destrui non potest. Unica enim causa reflexionis est vis elasticitatis, & corpora hac vi destituta sistuntur, quotiescumque æqualibus motibus sibi mutuò obviam eunt. Atq; hoc quidem experiundo comprobri poterit, si duo pendula æqualia ex æqualibus altitudinibus ita sint dimissa, ut rectà in se invicem incurrant. Si enim pendula illa sint ex plumbo, vel argillâ molli; jam motum suum omnem, vel ferè omnem amittent. Quod si autem ex materiâ aliquâ elastica sint; jam motus tantum dumtaxat retinebunt, quantum à vi illâ elasticâ denuò acceperint.

Cæterum leges corporum inertium superius

rius allatas tradidit primus omnium Johannes Wallisius in Actis Philosophicis Londinensibus, qui primus etiam veram causam reflexionis in aliis corporibus aperuit, eamque ab elasticitate docuit proficisci. Sed leges, quas corpora perfectè elastica observant, invenerunt seorsim, & eodem ferè tempore cum Societate Regiâ Anglicanâ communicarunt Christophorus Wrennus, & Christianus Hugenius. Possent autem circa postremas has leges plura alia observari; sed quoniam iis, qui sedulò considerare velint, quæ hætenus dicta sunt, sponte illa sese offerent, supervacaneum erit ulterius super hac re labores nostros extendere.

S E C T I O III.

De Motu Graviorum Naturali.

Quemadmodum gravia dicuntur ferri artificiosè, quotiescumque machinarum ope aliâ ratione moventur, quàm secundum directionem gravitatis; ita naturaliter moveri dicuntur, quum subinde quidem feruntur, ut in latione gravitatis sequantur directionem. Possunt autem corpora gravia naturaliter moveri, non modò in planis verticalibus, sive perpendiculariter
ad

ad horizontem erectis, verum etiam in planis obliquis, & utcumque ad horizontem inclinatis. Unde de motu gravium naturali acturi, primò quidem considerabimus eorum descensum per plana verticalia, tum deinde casum eorundem per plana ad horizontem inclinata expendemus.

C A P. I.

De descensu gravium per plana verticalia, sive recta ad horizontem.

V Idimus superius, vim gravitatis non eandem esse in omnibus à telluris centro distantis, sed decrescere in recessu à centro illo in duplicatâ distantiae ratione. Id autem nihil obstat, quominus in examinandis motibus gravium rectâ descendendum assumamus cum Galilæo, vim gravitatis eadem semper, & constanti ratione in corpora gravia operari; quandoquidem motus corporum gravium prope telluris superficiem à nobis considerantur, ubi major, minorve corporis gravis à telluris centro distantia nequaquam efficere potest, ut actio gravitatis eadem ubique non deprehendatur.

Ex eo autem, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eadem, & cōstanti ratione, cōsequitur motum gravium rectâ descendendum

tium esse æquabiliter acceleratum. Nam diviso tempore, quo grave corpus descendit, in particulas æquales, & indefinitè parvas, propter continuam, & constantem gravitatis actionem, si primâ temporis particulâ unum excipiat impulsus à gravitate, habebit secundâ temporis particulâ impulsus alium priori æqualem; adeoque corporis velocitas post hos duos impulsus prioris dupla erit. Unde etiam, quia tertiâ temporis particulâ impulsus alter, cuique priorum æqualis, ei per gravitatem imprimitur, fiet ipsius velocitas tripla ejus, quam primâ temporis particulâ habebat; & sic de cæteris. Quocirca gravi rectâ cadenti æqualibus temporibus æqualia semper accedent velocitatis incrementa; proindeque motus ejus erit æquabiliter acceleratus.

Id colligi quoque potest ex theoremate generali superiùs à Nobis ostēso, scilicet quod planum virium sit, ut velocitas, quam corpus habet in fine temporis, cui planum correspondet. Sit enim gravis rectâ descendens

FIG. 58. $AQNB$ planum virium; ita ut designatis temporibus per abscissas AP , AQ , referant ordinatæ correspondentes PM , QN vires, quæ agunt in grave corpus in fine eorum temporum. Et quoniam propter constantem gravitatis actionem vires, quæ agunt in corpus, sunt semper æquales, terminabitur
pla-

planum virium $AQNB$ rectâ BN , ipsi AQ parallelâ: proindeque areae $APMB$, $AQNB$, quæ referunt velocitates, quas corpus habet in fine temporum AP , AQ , velut parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta, erunt ut ipsa tempora AP , AQ . Est igitur velocitas gravis, rectâ descendens, semper ut tempus, in quo acquiritur: quare æqualibus temporibus æqualia ei accedent velocitatis incrementa; atque aded motus ejus erit uniformiter acceleratus.

Hinc si recta QR designet velocitatem, quam grave corpus rectâ descendens habet in fine temporis AQ , & per quodlibet aliud punctum P ducatur recta PO , ipsi QR parallela, quæ conveniat cum AR in puncto O ; designabit PO velocitatem, quam idem corpus habet in fine temporis AP , eritque aded triangulum AQR planum suæ velocitatis. Nam, propter similitudinem triangulorum AQR , APO , QR est ad PO , ut AQ ad AP . Sed velocitates gravis rectâ descendens in fine temporum AQ , AP sunt, ut ipsa tempora AQ , AP . Quare ex æquali eadem velocitates erunt inter se, ut rectæ QR , PO ; & propterea designante QR velocitatem, quam grave corpus habet in fine temporis AQ , designabit PO velocitatem, quam idem corpus habet in fine temporis AP .

R

Jam

Jam demonstravimus superius, spatium à corpore mobili utcumque descriptum plano suæ velocitatis proportionem correspondere. Erit igitur spatium descriptum in tempore AP ad spatium descriptum in tempore AQ, ut est triangulum APO ad triangulum AQR. Sunt autem hæc duo triangu-
 gula similia inter se, adeoque rationem habent duplicatam laterum homologorum AP, AQ. Quare spatia, quæ grave describit temporibus AP, AQ, erunt inter se, ut ipsorum temporum quadrata: proindeque motus gravium rectâ descendendum tali lege fiet, ut spatia, quæ ab initio descensus describuntur, sint semper, ut quadrata temporum descriptionis.

Hoc idem ostendi quoque potest ope illius theorematis, quod scala virium sit, ut quadratum velocitatis, quam reperitur corpus habere, postquam peragravit spatium, ad quod scala refertur. Sit enim AQNB scala virium gravis rectâ descendens, ita ut designatis spatiis per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ PM, QN vires, quæ agunt in corpus in fine temporum, quibus spatia illa percurruntur. Et quoniam, propter constantem gravitatis actionem, vires, quæ agunt in corpus, sunt semper æquales; terminabitur scala virium AQNB rectâ BN ipsi AQ parallela: proindeque area APMB
 AQNB.

AQNB, quæ referunt quadrata velocitatum, quas corpus habet in fine temporum, quibus describuntur spatia AP, AQ, velut parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta, erunt ut ipsa spatia AP, AQ. Sunt igitur spatia AP, AQ, ut quadrata velocitatum, quas spatiis iis descriptis grave corpus acquirit; & consequenter eadem spatia erunt quoque, ut quadrata temporum descriptionis, quum velocitates sint semper temporibus proportionales.

Itaque spatia, quæ grave corpus rectâ descendens describit, computata ab initio descensus, sunt semper tam ut quadrata temporum descriptionis, quam ut quadrata velocitatum, quas in fine eorum temporum corpus acquirit. Hinc siquidem AQTVC sit scala reciproca suæ velocitatis, hoc est figura, in qua designatis spatiis per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ correspondentes PS, QT reciproce velocitates, quas spatiis iis descriptis grave corpus acquirit; erit ut AP ad AQ, ita QT quadratum ad PS quadratum: proindeque solidum, quod fit ex AP in PS quadratum, æquale erit solidum, quod fit ex AQ in QT quadratum. Unde patet, lineam curvam TSV, quæ terminat scalam reciprocam velocitatis, esse hyperbolam, uno gradu altiore hyperbolâ Apollonianâ, nimirum eandem illam, quam

Recentiores hyperbolam cubicam vocant ;
ejusque Asymptotos esse rectas AC, AQ.

Et quoniam ostensum est superius, scalam
reciprocam velocitatis proportionalem esse
tempori , quo describitur spatium , cui sca-
la correspondet ; erunt tempora , quibus
describuntur spatia AP , AQ , ut areae cor-
respondentes APSVC , AQTVC . Unde,
quia tempora illa sunt , ut velocitates in fi-
ne eorum acquisitæ , hoc est , ut rectæ QT,
PS, sive etiam ob naturam hyperbolæ TSV,
ut rectangula APS , AQT ; erit ex æquali,
ut area APSVC ad aream AQTVC , ita re-
ctangulum APS ad rectangulum AQT ; adeo-
que permutando , convertendo , & iterum
permutando , erit area SVCH ad aream
TVCK , ut rectangulum APS , sive AHS ad
rectangulum AQT , sive AKT . Ex quo se-
quitur , differentiam duarum hujusmodi
arearum HSTK proportionem semper corre-
spondere differentiæ rectangulorum AKT,
AHS ; atque adeo esse reciprocè , ut id , quod
oritur , applicando rectangulum HAK ad
KH ; quum rectangula AKT, AHS sint in re-
ciprocâ ratione ipsarum AK , AH.

Ex eo porrò , quod spatia à gravi rectâ
cadente descripta , computata ab initio ca-
sus , sint in duplicatâ ratione temporum ;
sequitur , quod si tempora sumantur , ut
numeri naturales 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , &c. spa-
tia

tia hisce temporibus descripta, computando ab initio motus, sint ut quadrata numerorum naturalium 1, 4, 9, 16, 25, 36 &c. Unde liquet ulterius, quod si tempora sumantur æqualia, spatia, quæ grave corpus describit in singulis temporibus æqualibus, sint ut numeri impares 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.; quum notum sit, ex continuâ horum numerorum collectione oriri quadrata numerorum naturalium. Quare gravia inter descendendum subinde motum suum accelerabunt, ut spatia temporibus æqualibus descripta eam inter se rationem retineant, quam habent numeri impares ab unitate se consequentes.

Circa motum gravium rectâ descendentium illud etiam præteriri non debet, quod spatium, à gravi è quiete cadente dato tempore descriptum, dimidium sit ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore describeretur. Ostensum est enim, quod si AQ referat tempus; quo grave corpus è quiete cadens rectâ descendit, & QR referat velocitatem in fine illius temporis acquisitam, spatium interea temporis descriptum sit ut triangulum AQR. Jam verò spatium quod tempore AQ describitur æquabiliter velocitate QR, est ut rectangulum AQR. Itaque, quemadmodum triangulum AQR dimidium est rectanguli AQR, ita quoque

spatium, quod grave è quiete cadens describit tempore AQ , dimidium erit ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore percurreret.

FIG. 56.

Hæc omnia consequuntur ex hypothesi illâ, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem semper, & constanti ratione. Non abludere autem à vero illiusmodi hypothesim, confirmant experimenta Galilæi, Ricciolii, & Hugonii, quippe quibus evincitur, spatia, quæ grave corpus rectâ descendens describit, ab initio descensus computata, esse inter se in duplicatâ temporum ratione, saltem aeris resistentiâ sublatâ. Interim, quia vera gravitatis theoria est, ut decrescat in recessu à tellure in duplicatâ ratione distantiae à centro ejus, quemadmodum solidè collegit Eques Auratus Isaac Newtonus ex totius mundani systematis cognitione; non abs re erit inquirere, quid in hac aliâ hypothesi contingere debeat gravibus rectâ descendentibus.

Et primò quidem in hac aliâ hypothesi, quod vis gravitatis sit reciprocè, ut quadratum distantiae à centro telluris, scala virium terminabitur eâdem illâ hyperbolâ cubicâ, qua terminatur in hypothesi gravitatis constantis scala reciproca velocitatis, sed relatè ad alteram suam asymptotum consideratâ. Etenim si C sit centrum telluris, &

desi-

designatis spatiis per abscissas AP , AQ , referant ordinatæ correspondentes PM , QN vires, quæ agunt in corpus in fine temporum, quibus spatia illa percurruntur; erit ut PM ad QN , ita CQ quadratum ad CP quadratum: proindeque, quia solidum, quod fit ex CP quadrato in PM , æquale est solido, quod fit ex CQ quadrato in QN ; erit curva BMN illa eadem hyperbola cubica, de qua paulò ante locuti sumus, nisi quod illic cõsiderabatur relatè ad asymptotum CD , hìc verò puncta ejus omnia referantur ad asymptotum alterum AC .

Hinc area $APMB$, quæ est ut quadratum velocitatis, quam corpus acquirit percurso spatio AP , erit reciprocè, ut rectangulum ACP applicatum ad AP , hoc est, ob datam AC , ut AP directè, & PC inversè. Atque ita quoque area $AQNB$, quæ est ut quadratum velocitatis, quam corpus nanciscitur descripto spatio AQ , erit reciprocè, ut rectangulum ACQ applicatum ad AQ , hoc est, ob datam AC , ut AQ directè, & QC inversè. Unde liquet, in hypothesi, quod vis gravitatis decreseat in recessu à tellure in duplicatâ ratione distantie à centro ejus, quadrata velocitatum, quas corpus in fine duorum quorumvis temporum reperitur habere, esse in ratione compositâ ex directâ spatiorum temporibus iis descriptorum, &

reciprocâ eorum, quæ remanent describenda, quò ad telluris centrum grave corpus perveniat.

Itaque in hac aliâ hypothesi, si grave corpus decidat ex A, & tempore aliquo describat spatium AP, velocitas in fine illius temporis acquisita tanta erit, ut quadratum ejus sit, ut spatium descriptũ AP directè, & spatium describendũ PC inversè. Unde modò si super AC tamquam diametro, describatur semicirculus AOC, & productâ ordinatâ rectangulâ PM usque in O, agatur per punctum O recta CR, quæ abscindat ex AB protractâ portionem AR, designabit portio ista AR velocitatem, quam grave corpus reperitur habere in puncto P; quandoquidem propter triangula similia CAR, CPO, AR quadratum est ad AC quadratum, ut PO quadratum ad PC quadratum, sive etiam ut AP ad PC; adeòque, ob datam AC, erit AR quadratum, ut AP directè, & PC inversè.

Sit jam FACST scala reciproca velocitatis. Itaque tempus, quo describitur spatium AP, erit ut area FAPST. Et quoniam ipsi PS est reciprocè proportionalis AR, erit areola SPps, ut Pp directè, & AR inversè: proindeque, quia Pp adæquat rectangulum POo applicatum ad radium semicirculi, & AR adæquat rectangulum CAO applicatum

cum ad CO ; neglectis datis, erit areola $SPps$, ut solidum, quod fit ex tribus PO , CO , Oo , applicatum ad AO . Sed demisso super CO perpendiculo ob , AO est ad PO , ut Oo ad ob ; atque adeò solidum, quod fit ex tribus PO , CO , Oo applicatum ad AO adæquat rectangulum ex CO in ob , hoc est duplum trianguli COo . Itaque eadem areola $SPps$ erit, ut triangulum COo ; proindeque, quia area tota $FAPST$ proportionalis fit segmento circulari ACO , designabit segmentum istud circulare tempus, quo describitur spatium AP .

Ex quibus liquet, in hypothefi, quod vis gravitatis decrefcatur in recessu à tellure in duplicatâ ratione distantie à centro ejus, posse ope solius circuli determinari, tum tempus, quo spatium aliquod describitur, tum velocitatem in fine illius temporis acquiritam. Nam si A sit locus, unde decidit grave corpus, dum ad telluris centrum C conatur accedere, & AP sit spatium, quod in suo descensu rectilineo tempore aliquo describit; erectâ perpendiculari PO , quæ semicirculum AOC secet in O , ductâque per punctum O rectâ CR , abscindente ex AB ipsi PO parallelâ portionem AR , designabit segmentum circulare ACO tempus, quo describitur spatium AP , & recta AR velocitatem in fine illius temporis acquiritam.

tam . Nec reticebimus , quod quum segmentum illud circulare prodeat multiplicando quartam partem diametri AC per summam ex arcu AO , ejusque sinu recto PO , idem tempus descensus designari quoque possit per ordinatam correspondentem cycloidis , quæ oritur ex revolutione semicirculi AOC super rectâ CD .

Circa vim gravitatis aliam olim hypothesein invexit magnus ille Senator Tolosanus Petrus Fermatius: nimirum, quod ea esset distantia à centro telluris directè proportionalis : qua in re acerrima inter ipsum , & Dominum Robervallium contentio fuit, ut constat ex epistolis , quæ inter ejus opera posthuma editæ reperiuntur . Hæc hypothesis , si paucos quosdam excipias , qui eam amplexi sunt , communiter rejicitur; quum vis gravitatis in accessu ad tellurem augeatur potius , quàm minuatur . Interim Vir eximius Isaac Newtonus in corporibus , quæ à superficie telluris deorsum pergunt , arbitratur posse eam sibi locum vindicare . Unde , quæ sint leges descensus in hac etiam hypothese, non gravabimur expendere .

FIG. 60. Itaque si A sit locus , unde decidit grave corpus , & C centrum telluris , terminabitur scala virium AQNB corporis rectâ descendente lineâ rectâ BN , per telluris centrum

trum C transeunte; quandoquidem ordinatae PM , QN , quae referunt vires agentes in corpus in locis P , & Q , distantibus CP , CQ proportionales esse debeant. Ex quo sequitur, quadrata velocitatum iisdem in locis P , & Q esse, ut trapezia $APMB$, $AQNB$; hoc est, ut excessus trianguli ACB super triangulis PCM , QCN ; vel etiam, ut excessus quadrati AC super quadratis CP , CQ ; proindeque, si centro C , intervalloque CA describatur quadrans circuli $AORD$, erit quadrans iste scala velocitatum directa, hoc est figura, quae ordinatis suis designat directè velocitates à corpore acquisite in locis correspondentibus.

Sit jam $FACEST$ scala reciproca velocitatum, hoc est figura, quae ordinatis suis designat reciprocè easdem corporis velocitates. Itaque tempus, quo grave corpus describit spatium AP , designabitur per aream correspondentem $FAPST$. Et quoniam PS ipsi PO est reciprocè proportionalis; erit areola $PSsp$, ut Pp directè, & PO inversè. Sed, quum Oo sit ad Pp , ut CO ad PO ; erit Oo , ut Pp directè, & PO inversè. Igitur areola $PSsp$ ipsi Oo directè proportionem respondebit: proindeque, quum fiat area tota $FAPST$ proportionalis arcui AO ; tempus descensus per AP designari quoque poterit per arcum correspondentem AO .

Unde patet in hypothefi, quod vis gravitatis fit, ut distantia à centro telluris, poffe folius quadrantis ope determinari, tum tempus, quo fpatium aliquod describitur, tum velocitatem in fine illius temporis acquifitam. Etenim, fi A fit locus, unde decidit grave corpus, dum conatur accedere ad centrum telluris C , & AP fit fpatium, quod in fuo defcenfu rectilineo tempore aliquo describit; erectâ perpendiculari PO , quæ fecet quadrantem $AORD$ in puncto O , designabit arcus AO tempus, quo describitur fpatium AP , & finus rectus PO velocitatem in fine illius temporis acquifitam. Hinc ficuti fcala temporum in hypothefi, quod vis gravitatis fit reciproçè proportionalis quadrato distantiae, eft cyclois, quæ describitur per revolutionem femicirculi, qui in hypothefi illâ confiderari debet; fic eadem fcala temporum erit figura, quæ oritur, applicando arcus quadrantis $AORD$ ad fuos finus verfos, quum vis gravitatis distantiae à centro directè proportionalis affumitur.

Sed in hac gravitatis hypothefi plura alia notatu digna occurrunt confideranda. Nimirum primò, quod tempus defcenfus per altitudinem totam AC fit ad tempus, quo poffit corpus percurrere eandem viam cum uniformi velocitate, & æquali ei, quam in fine defcenfus reperitur habere, ut eft
qua-

quadrantis circumferentia AORD ad radium AC. Nam si figura FACEST sit scala reciproca velocitatis corporis descendens, erit rectangulum ACEG scala reciproca velocitatis, dum idem corpus prædictâ ratione fertur æquabiliter: proindeque tempus primum ad tempus secundum erit, ut figura FACEST ad rectangulum ACEG: Unde eò res redit, ut ostendamus, figuram FACEST esse ad rectangulum ACEG, ut est quadrantis circumferentia AORD ad radium AC.

Id autem ostendemus in hunc modum. Quoniam PS, CE designant reciproce velocitates corporis descendens in punctis P, & C; erit ut PS ad CE, ita CD, sive CO ad PO. Jam verò PS est ad CE, ut areola SPps ad areolam correspondentem rectanguli ACEG; itemque CO est ad OP, ut Oo ad Pp. Quare erit ex æquali, ut areola SPps ad rectanguli ACEG areolam correspondentem, ita Oo ad Pp. Unde, quia hujus analogiæ, quocumque in loco consideretur, duo consequentes, hoc est secundus, & quartus terminus, tales sunt, ut dato uno, detur etiam & alter; erit quoque ut figura FACEST ad rectangulum ACEG, ita circumferentia AORD ad radium AC.

Secundò, quod si corpus feratur æquabiliter velocitate ultimò acquisitâ eodem tempore, quo cecidit per altitudinem totam AC, descri-

scribat tempore illo longitudinem æqualem circumferentiæ quadrantis AORD. Ostensum est enim, tempus descensus per AC esse ad tempus, quo eadem AC describeretur æquabiliter velocitate finali, ut est circumferentia quadrantis AORD ad radium AC. Sed, quum corpus fertur æquabiliter, tempus, quo describitur AC, est ad tempus, quo percurritur longitudo æqualis circumferentiæ AORD, ut est AC ad circumferentiam AORD. Igitur ex æquali ordinando tempus descensus per AC erit ad tempus, quo velocitate ultimò acquisitâ describitur longitudo æqualis circumferentiæ quadrantis AORD in ratione æqualitatis.

FIG. 60.
61.

Hoc idem ostendi quoque potest ope illius theorematis, quod spatium à mobili utrumque descriptum plano suæ velocitatis proportionem respondeat. Si enim circumferentia quadrantis AORD distendatur in directum, eique maneant sinus perpendiculariter applicati, erit figura, quæ inde oritur ADC planum velocitatis corporis descendens per altitudinem totam AC: proindeque spatium plano illo descriptum erit ad spatium, quod eodem tempore describeretur æquabiliter velocitate finali, ut est figura ADC ad rectangulum circumscriptum ADCH. Unde eò res redit, ut ostendamus, figuram ADC esse ad rectangulum ADCH,

ADCH, veluti est radius quadrantis AC ad ejus circumferentiam AORD, vel quia rectangulum ADCH fit multiplicando radium AC per circumferentiam AORD, ut area figuræ ADC æqualis sit quadrato, quod fit ex radio AC.

Id verò ostendetur hac ratione. Quoniam in quadrante ACD radius AC, sive CO est ad sinum PO, ut est arcus indefinite parvus Oo ad correspondentem radii portionem Pp; erit rectangulum POo æquale rectangulo ex AC in Pp. Sed hæc æqualitas in omni quadrantis loco reperitur. Quare superficies, quæ oritur applicando ad singula puncta circumferentiæ quadrantis AORD sinus correspondentes, æqualis erit quadrato, quod fit ex radio AC. Est autem superficies eâ ratione genita area ipsius figuræ ADC. Itaque eidem AC quadrato æqualis quoque erit area figuræ ADC.

Denique, quod grave corpus ad telluris centrum C eodem semper tēpore perveniat, sive descendat per altitudinem AC, sive per aliam quamvis BC. Nam descriptis ex puncto C tamquam centro quadrantibus AD, BE, designabit CD velocitatem finalem in descensu per AC, & CE velocitatem finalem in descensu per BC. Quocirca eadem altitudines AC, BC finalibus illis velocitatibus eodem tempore æquabiliter de-

FIG. 62.

describentur. Unde describentur etiam eodem tempore, dum corpus per vim gravitatis urgetur; quandoquidem tempus descensus per quamlibet ex iis altitudinibus ad tempus, quo eadem altitudo velocitate finali æquabiliter percurritur, datam habet rationem.

Id ipsum ostendi quoque potest hac aliâ ratione. Concipiantur in punctis A, & B duo mobilia æqualia, quæ describât eodem tempore spatiola duo Aa, Bb. Itaque velocitates acquisitæ erunt, ut sinus aM, bN, qui ab ipsis arcubus AM, BN sensibilibiter non differunt. Sed eadem velocitates, velut eodem tempore genitæ, sunt etiam, ut vires, quibus eadem mobilia urgentur. Itaque, quia vires istæ designantur per rectas AC, BC, erit ut AC ad BC, hoc est ut AD ad BE, ita AM ad BN; adeoque permutando AD erit ad AM, ut BE ad BN.

Jam, quum grave corpus decidit ex A, tempus per AC est ad tempus per Aa, ut AD ad AM. Atque ita quoque, quum grave corpus decidit ex B, tempus per BC est ad tempus per Bb, ut BE ad BN. Quare erit ex æquali, ut tempus per AC ad tempus per Aa, ita tempus per BC ad tempus per Bb: proindeque permutando tempora per AC, BC erunt inter se, ut tempora per Aa, Bb. Unde, quemadmodum æqualia sunt tem-

tempora per Aa , Bb , ita quoque æqualia erunt tempora per AC , BC .

C A P. II.

*De descensu gravium per plana ad horizon-
tem inclinata.*

ET si superiori capite circa descensum gravium per plana verticalia varias gravitatis hypotheser assumpserimus; hîc tamen, ubi agendum nobis erit de descensu gravium per plana inclinata ad horizontem, in eâ tantum hypothesi consistemus, quæ gravitatem ponit constantem, & invariantam. Sed, priusquam leges descensus expendendas aggrediamur, memores ejus, quod prætermisimus, dum de artificiosâ gravium latione egimus, vires plani inclinati in ponderibus sursum elevandis oportet definiamus.

Planum inclinatum vocamus, quod cum plano horizontali obliquos angulos constituit, veluti est AB respectu plani horizontalis BC . Hujusmodi planum conferre in ponderibus sursum elevandis, ex ipsâ, quavis gravitatis operatur, ratione deducitur. Accedunt etenim gravia ad telluris superficiem secundum rectas lineas horizonti perpendiculares: proindeque grave aliquod cor-
pus

FIG. 63.

pus majore vi descendit per planum verticale, quam per planum inclinatum. Jam verò, quum corpus aliquod grave sursum à potentiâ per planum trahitur; quod potentiæ opponitur, & reluctatur est vis ipsa, qua corpus per planum illud nititur descendere. Itaque major exigitur potentia ad trahendum pondus per planum verticale, quam per planum inclinatum.

Hinc, ut vires plani inclinati possint definiri, determinanda prius est ratio, quam habet gravitas absoluta ad gravitatem relativam, hoc est vis, qua corpus aliquod grave descendere conatur per planum verticale, ad vim, qua idem grave corpus descendere nititur per planum inclinatum. Hunc in finem sequens theorema demonstrandum nobis proponimus: nimirum, quod si grave corpus descendat per planum aliquod inclinatum, gravitas ejus absoluta sit ad gravitatem relativam, ut est longitudo plani inclinati ad ejusdem altitudinem.

FIG. 63.

Referat itaque BC planum aliquod horizontale, ad quod inclinetur planum AB; descendat autem per longitudinem ejusdem plani corpus M, & designetur gravitas ejus absoluta per rectam MN, perpendicularem ad horizontem, secundum quam agit vis illa gravitatis. Itaque demisso super AB perpendiculo NO, poterit vis illa resolvi
in

in duas laterales MO , NO . Sed harum virium posterior NO nihil confert ad corporis descensum, quum agat secundum lineam longitudini plani perpendicularem; & corpus descendit tantum per vim priorem MO , quippe quæ suam exercet actionem secundum longitudinem ipsius plani. Quare vis absoluta gravitatis erit ad vim relativam, ut MN ad MO , hoc est propter triangula similia MNO , ABC , ut longitudo plani inclinati AB ad ejus altitudinem AC .

Hinc si fuerint plura plana inclinata AB , DB ejusdem longitudinis; vires, quibus grave aliquod corpus per plana illa descendere nititur, erunt, ut altitudines eorum planorum AC , DE . Nam vis absoluta gravitatis illius corporis est ad vim, qua nititur descendere per planum AB , ut est AB ad AC . Et similiter vis absoluta gravitatis ejusdem corporis est ad vim, qua nititur descendere per planum DB , ut est DB , sive AB ad DE . Quare ex æquali ordinando vis, qua corpus nititur descendere per planum AB , erit ad vim, qua descendere conatur per planum DB , ut est AC ad DE . Ex quo patet, vires illas non esse inter se in ratione angulorum, quibus plana ad horizontem inclinantur, sed in ratione sinuum illorum angulorum. Patetque etiam, quod sicuti vis, qua corpus nititur descendere, est

FIG. 64.

maxima, quum planum est verticale, sic etiam sit minima, & prorsus evanescat, quum planum horizontale est.

FIG. 63. Hinc etiam, si pondus M super longitudine plani inclinati AB sustineatur à potentiâ Q secundum directionem MR , quæ ipsi AB sit parallela; erit pondus M ad potentiam Q , ut longitudo plani AB ad altitudinem ejus AC . Nam potentia Q , quum agat in pondus M secundum lineam MR parallelam ipsi AB , adæquabit vim, qua grave corpus M nititur descendere per longitudinem AB . Quare pondus M ad potentiam Q erit, ut gravitas absoluta ad gravitatem relativam; atque adeo ex ostensis, ut longitudo plani inclinati AB ad altitudinem ejus AC . Ex quo patet, momentum potentiæ Q , sustentis pondus M super longitudine plani inclinati AB , augeri posse, non modò auctâ potentiâ ipsâ, verum etiam diminutâ plani altitudine AC .

Verumtamen, si potentia Q , sustinens pondus M super plano inclinato AB , agat secundum directionem MK horizonti parallelam; eo casu erit, ut potentia Q ad pondus M , ita altitudo plani AC ad basim ejusdem BC . Etenim, si vis absoluta ipsius potentiæ Q exponatur per rectam MT , ductâ quidem TS ipsi MR perpendiculari, resolvetur vis illa MT in duas alias vires late-

rales MS, TS. Sed harum virium sola prior MS impedit descensum corporis in plano, quum agat secundum lineam longitudini plani parallelam; altera verò TS descensui nequaquam opponitur, utpote quæ directè corpus versus ipsum planum impellit. Itaque vis absoluta potentiae Q erit ad vim, qua impedit descensum corporis in plano, ut MT ad MS, sive etiam ut AB ad BC. Jam verò vis, qua potentia Q impedit descensum corporis in plano, æqualis est vi, qua idem corpus per planum illud nititur descendere; & vis ista est ad pondus absolutum ejusdem corporis, ut AC ad AB. Igitur erit ex æquali perturbando, ut vis absoluta potentiae Q ad pondus absolutum corporis M, ita altitudo plani AC ad ejusdem basim BC.

Atque hæc de viribus, quibus retinentur pondera super planis inclinatis. Videamus modò quæ leges observentur in descensu gravium per eadem plana in hypothese, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eadem, & constanti ratione. Et quidem tametsi vis gravis descendens per planum aliquod inclinatum minor sit vi suâ absolutâ, qua agente rectâ descenderet; nihilominus, quemadmodum motus gravis rectâ descendens est æquabiliter acceleratus, & æqualibus temporibus æqualia ei semper

accedunt velocitatis incrementa; ita quoque, quum grave corpus per planum aliquod inclinatum descendit, accelerabitur inter descendendum uniformiter, ejusque velocitas pro ratione temporis semper augebitur.

Descendat etenim grave corpus *M* per planum inclinatum *AB*. Ostendendum est igitur, motum ejus in hoc descensu esse æquabiliter acceleratum, vel quod idem est, æqualibus temporibus æqualia ei semper accedere velocitatis incrementa. Nam per ea, quæ paulò ante ostensa sunt, vis, qua corpus grave *M* conatur descendere per planum inclinatum *AB*, est ad vim suam absolutam in datâ ratione, scilicet, ut altitudo plani *AC* ad longitudinem ejusdem *AB*. Itaque quemadmodum vis absoluta gravitatis eâdem semper, & constanti ratione agit in corpora; ita quoque eodem semper tenore aget vis illa, qua ipsum corpus *M* descendere nititur per planum inclinatum *AB*. Quocirca, quemadmodum gravi rectâ descendentem, propter constantem gravitatis actionem, æqualibus temporibus æqualia semper accedunt velocitatis incrementa; ita quoque necesse est, ut velocitas gravis obliquè descendentis augeatur pro ratione temporis, quum similiter ad descensum urgeatur à vi, cujus constans, & uniformis est actio.

Ex eo autem, quod descensus gravis per planum utcumque ad horizontem inclinatum sit motus æquabiliter acceleratus, sequitur, ut quæcumque de spatiis, quæ à gravi rectâ descendente describuntur, superius ostensa sunt, eadem vera sint quoque de spatiis, quæ percurruntur à gravi descendente per planum aliquod utcumque ad horizontem inclinatum. Itaque primò spatia, quæ grave corpus descendens per planum inclinatum describit, computata ab initio descensus, sunt, ut quadrata temporum, quibus describuntur. Unde secundò si tempora ab initio sint, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., spatia descripta iis temporibus, ab initio semper computata, erunt, ut quadrata numerorum naturalium. Adedque tertio, si tempora sumantur æqualia, spatia æqualibus hisce temporibus descripta, erunt ut numeri impares ab unitate se consequentes. Et quartò demum spatium percursum à gravi in dato tempore dimidium est ejus, quod in eodem tempore velocitate finali æquabiliter describeretur.

Quum itaque leges descensus per plana inclinata eadem sint cum legibus descensus per plana verticalia; facile erit inquirere, num ea omnia, quæ à Nobis ostensa sunt, cum experienciis conveniant. Nam, etsi in

descensu verticali non ita facile sit experimenta instituere, quum in eo pernecitas motus accuratis observationibus locum non relinquat; attamen in planis non admodum declivibus facile erit rei periculum facere, quum motus haud admodum veloces exactè in iis mensurari queant. Cæterum in experimentis capiendis aeris resistentia nonnihil aberrare facit; verum hoc è minus, quò corpora plus gravitatis pro superficie magnitudine continent, quòque in minoribus spatiis periculum facimus. Sed & planum, per quod descendit grave corpus, quàm fieri potest politum esse debet, ut ejus motus super eo nullâ scabritie impediat.

Uti doctrinam de descensu gravium ulterius cum Galilæo prosequamur, placet descensum gravium obliquum conferre cum descensu eorundem gravium verticali. Hujus autem comparationis theorema fundamentale in primis ostendemus: scilicet, quod si grave corpus descendat per planum aliquod, utcumque ad horizontem inclinatum AB, velocitas, quam in dato tempore acquirit, sit ad velocitatem, quam acquireret eodem tempore, si rectâ descenderet, ut est altitudo plani AC ad ejusdem longitudinem AB.

Nam incrementa velocitatum, quæ in
gra-

gravibus descendantibus per plana AB, AC eodem tempore indefinitè parvo producuntur, sunt ut vires, quibus urgentur. Sed vires istæ sunt inter se, ut AC ad AB. Quare in eadem hac ratione erunt incrementa illa velocitatum. Est autem hæc ratio ubique eadem, & constans. Itaque summa incrementorum unius gravis erit ad summam incrementorum alterius in eadem ratione: proindeque velocitas, quam grave corpus in dato tempore acquirit super AB, erit ad velocitatem, quam acquirit eodem tempore super AC, ut est AC ad AB.

Ex hoc autem theoremate plura quidem ad rem nostram spectantia deducuntur: nempe primò, quod si portio plani inclinati AD eodem tempore percurratur à gravi, quo perpendiculum AC, tres rectæ lineæ AB, AC, AD sint in continuâ proportionē. Nam velocitatibus acquisitis in punctis C, & D percurruntur eodem tempore æquabiliter dupla ipsarum AC, AD. Quare, quum spatia motu æquabili eodem tempore percurra sint, ut velocitates, quibus percurruntur; erunt velocitates acquisitæ in punctis C, & D, ut dupla ipsarum AC, AD, sive etiam ut ipsæ longitudines AC, AD. Jam verò eadem velocitates, utpote eodem acquisitæ tempore sunt inter se, ut AB ad AC. Itaque erit ex æquali, ut AB
ad

+ spatia

ad AC, ita AC ad AD.

Vicissim autem per impossibile facile erit ostendere, longitudines AC, AD eodem tempore percurri, si sint continuè proportionales tres rectæ lineæ AB, AC, AD. Unde, quemadmodum si quæratür portio plani inclinati AD, quæ percurratur eodem tempore, quo perpendiculum AC, invenitur ea, demittēdo super AB perpendicularem CD; ita quoque si quæratür perpendiculum AC, quod describatur eodem tempore, quo portio plani inclinati AD, habebitur erigendo super AB perpendicularem DC. Ex quo etiam datis duobus planis inclinatis AB, AE facilè erit super AE invenire portionem AG, quæ percurratur eodem tempore, quo portio AD alterius plani: nimirum si erectâ super AB perpendiculari DC plano verticali occurrente in C, demittatur ex C super AE perpendicularis altera CG.

FIG. 66. Atque hinc sequitur ulterius, quod si circuli ADC ad horizontem erecti ex puncto supremo A demittantur quotcumque plana inclinata AB, interceptæ ipsorum portiones AD eodem tempore percurrantur, quo percurritur diameter verticalis AC, quæ est communis eorum omnium planorum altitudo; quandoquidem junctis rectis CD, quia anguli ADC, velut in semicir-
cu

culo existentes, sunt recti, erunt rectæ illæ CD ipsis planis AB perpendiculares. Unde si fuerit circulus alter AEF, qui contingens priorem in A, secet eadem plana inclinata AB in punctis E, diametrum verò verticalem AC in puncto F, fiatque motus initium à puncto supremo A; planorum portiones utroque circulo interceptæ DE percurrentur eodem tempore, quo portio diametri verticalis CF, inter utrumque quoque circulum comprehensa.

Sed non modò portiones planorum exeuntium ex puncto circuli supremo percurrentur eodem tempore, quo communis omnium altitudo, sive diameter ad horizontem erecta; verùm etiam portiones planorum, quæ ad punctum imum terminantur. Maneat siquidem, ut priùs, circulus ADC ad Fig. 67. horizontem erectus, & per punctum infimum C transeant plura plana inclinata DB. Ostendendum est igitur interceptas ipsorum portiones DC eodem tempore percurri, quo diameter AC. Id autem abundè liquet; nam completis parallelogrammis AB, quemadmodum recti sunt anguli ADC, ita quoque recti erunt anguli DCB iis alterni: adeòque portiones DC percurrentur eodem tempore, quo perpendiculari DB. Est autem unumquodque ipsorum æquale diametro AC: Quare eadem por-

portiones DC percurrentur eodem tempore cum diametro AC.

Consequitur etiam ex ostensis, tempus
FIG. 65. descensus per planum aliquod inclinatum AB esse ad tempus descensus per altitudinem ejus plani AC, ut sunt ipsæ longitudines AB, AC. Nam demissâ super AB perpendiculari CD, percurreretur abscissa portio AD eodem tempore, quo altitudo AC. Sed tempora descensus per longitudines AB, AD sunt in ipsarum AB, AD ratione subduplicatâ, hoc est propter continuè proportionales AB, AC, AD, ut est AB ad AC. Itaq; tēpus descensus per AB erit ad tempus descensus per AC, ut est AB ad AC. Ex quo facile colligi potest, quod si plura fuerint plana inclinata, eandem altitudinem habentia, tempora descensus per plana illa sint, ut ipsæ planorum longitudines.

Consequitur demum, velocitatem acquisitam in descensu per AB esse ad velocitatem acquisitam in descensu per AC in ratione æqualitatis. Nam demissâ adhuc super AB perpendiculari CD, propter spatia AC, AD, quæ eodem tempore percurruntur, velocitas acquisita in descensu per AD erit ad velocitatem acquisitâ in descensu per AC, ut est AC ad AB. Jam verò velocitas, quæ acquiritur in descensu per AD, est ad velocitatem, quæ acquiritur in descensu per AB,

AB, ut est tempus per AD, five AC ad tempus per AB, hoc est ut AC ad AB. Itaque velocitas acquisita in descensu per AC æqualis erit velocitati, quæ acquiritur in descensu per AB. Ex quo haud difficile erit inferre, velocitates gravium finales per diversa plana descendendum æquales esse inter se, quum ex eâdem altitudine ad eandem lineam horizontalem gravia perveniunt.

C A P. III.

De descensu gravium per plura plana contigua; ubi etiam de casu eorundem per plana curvilinea.

Consideravimus huc usque descensum gravium per unum, idemque planum, idque tum rectum ad horizontem, tum ad eum utcumque inclinatum; sed fieri quoque potest, ut grave corpus descendat vi gravitatis per plura plana contigua, quæ connectantur quidem inter se, sed diversimodè ad horizontem inclinentur. Itaq; quæ sint leges descensus per hujusmodi plana hoc alio capite oportet expendamus: quibus equidem cognitis, innotescant quoque nobis leges descensus per plana curvilinea, quippe quæ considerari possunt velut composita ex infinitis planis rectilineis indefinitæ parvitatis.

Et

FIG. 68.

Et quidem Galilæus, aliique quāmplures supposuerunt, concursum planorum non impedire motum gravis descendens, sed tantum ipsius directionem mutare. Unde crediderunt, quod si grave corpus descendat per plura plana contigua AB , BC , CD continuato motu, semper eandem in fine velocitatem acquirat, ac si descenderet ex pari altitudine DE . Nam continuatis planis usque donec conveniant cum lineâ horizontali AG in punctis F , & G , quia in B eadem acquiritur velocitas, descendendo grave per AB , ac si descendisset per FB , erit velocitas acquisita in C , descendendo per AB , BC tanta, quanta acquiritur in descensu per FC , sive GC ; atque adeo velocitas acquisita in D , descendendo per AB , BC , CD , eadem quoque erit, ac si descendisset corpus per GD , sive DE .

Atque hinc in definiendo tempore descensus per secundum planum BC , considerant grave corpus velut dimissum ex puncto F , in quo planum illud occurrit lineæ horizontali AG : adeo quidem, ut inventâ inter FB , FC mediâ proportionali FH , & designato tempore descensus per planum primum AB per ipsam AB , debeat BH designare tempus descensus per planum secundum BC . Nam eo ipso, quod AB designat tempus descensus per AB , designabit FB tempus de-

descensus per FB . Sed tempus per FB est ad tempus per FC in subduplicatâ ratione ipsarum FB , FC , hoc est ut FB ad FH . Itaque exprimet FH tempus descensus per FC ; atque adeò BH tempus descensus per BC .

Nec dissimiliter determinarunt tempus descensus per planum tertium CD : nimirum considerando grave corpus velut dimissum ex puncto G , in quo planum illud secatur lineam horizontalem AG , & ductâ HI ipsi AC parallelâ, faciendo, ut GL quadratum sit ad GI quadratum, veluti est GC ad GD . Nam designato per AB tempore descensus per ipsum planum primum AB , designabit FB tempus descensus per FB , FH tempus descensus per FC , GI tempus descensus per GC , & GL tempus descensus per GD . Unde quemadmodum BH exprimit tempus descensus per planum secundum BC , ita quoque exprimet IL tempus descensus per planum tertium CD .

Speciatim autem, si post descensum per aliquod planum AB , sequatur motus per FIG. 69. planum horizontale, in quo describat spatium quodlibet BD ; designato tempore descensus per AB mediante ipsâ AB , crediderunt, tempus motus per BD designari posse per semissem ipsius BD . Nam, quum fiat motus horizontalis velocitate acquisitâ in B , sumptâ BC ipsius AB duplâ, erit tempus

pus descensus per AB æquale tempore motus per BC. Sed tempus per BC est ad tempus per BD, ut BC ad BD, five etiam, ut AB ad semissem ipsius BD. Itaque in hac eadem ratione erit etiam tempus descensus per AB ad tempus motus per BD; & propterea designato per AB tempore descensus per AB, designabit semissis ipsius BD tempus motus per BD.

Primus, quem sciam, Petrus Varignonius in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1693, & rursus in iis, quæ referuntur ad annum 1704, Mechanicos commonefecit, falsum esse, quod grave corpus in ingressu per planum alterum eandem retineat velocitatem, quam in descensu per planum primum sibi comparavit, quodque adeò descendendo grave corpus continuato motu per plura plana contigua eandem in fine velocitatem acquirat, ac si ex pari altitudine descenderet: simulq; rationē determinavit, quā velocitas in descensu per planum primum acquisita habet ad eam, cum qua ingreditur corpus planum alterum: nempe quod sit, ut radius, five sinus totus ad sinum complementi ejus anguli, quem mutuo occurſu plana constituunt.

FIG. 70.

Sint enim AB, BC plana duo contigua, & factō initio motus ex A, descendat grave aliquod corpus continuato motu per ipsa AB, BC.

BC. Demittatur ex puncto A super BC perpendicularum AD; jamque si AB sit radius, sive sinus totus, erit BD sinus complementi anguli ABD, sive ABC. Ostendendum est igitur, velocitatem, quam grave corpus acquirit in descensu per planum primum AB, esse ad velocitatem, cum qua ingreditur planum alterum BC, ut est AB ad BD.

Nimirum si AB designet velocitatem, acquisitam in descensu per AB, resolvi ea poterit in duas alias laterales AD, BD. Sed harum velocitatum priori AD nequaquam ingreditur grave corpus planum alterum BC, quum urgeat illud directè versus planum. Itaque ingredietur dumtaxat velocitate alterâ BD, eaque tota quanta est hunc effectum producet, utpote quæ pellit corpus secundum ipsam illius plani longitudinem; adeoque velocitas acquisita in descensu per planum primum AB erit ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC, ut est AB ad BD.

Quum ergo in ingressu per planum alterum BC nequaquam retineat corpus velocitatem acquisitam in descensu per planum primum AB; perspicuum est, fieri nullo pacto posse, ut descendendo corpus continuato motu per plana contigua AB, BC, eandem in fine acquirat velocitatem, ac si descenderet per altitudinem parem AE. Et

par est ratio, quum plana contigua sunt plura, quàm duo; quandoquidem semper verum erit, quod corpus in ingressu per novum planum, nequaquam retineat eandem illam velocitatem, quam descendendo per priora plana sibi comparavit.

Demittatur jam ex puncto D super AB perpendicularis DF. Et quoniam AB est ad BD in subduplicatâ ratione ipsarum AB, BF; erit etiam in hac eâdem ratione subduplicatâ velocitas acquisita in descensu per planum primum AB ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC. Ex quo patet, in ingressu per planum alterum BC tantam corpus retinere velocitatem, quantam sibi comparasset, si utique descendisset per planum FB; quandoquidem velocitas acquisita in descensu per AB est ad velocitatem acquisitam in descensu per FB similiter in subduplicatâ ratione ipsarum AB, FB; proindeque in fine descensus, hoc est in puncto C, eandem habebit velocitatem, ac si descendisset per altitudinem FG.

Itaque corpus descendens per planum primum AB tantam retinebit velocitatem in ingressu per planum alterum BC, quantam sibi comparasset, si utique descendisset per FB. Atque hinc facile modò erit, definire rationem, quam habet tempus descensus per planum primum AB, ad tempus descen-

scensus per planum secundum BC, quum per utrumque planum continuato motu corpus descendit. Nam tempus per AB ad tempus per FB est in subduplicatâ ratione ipsarum AB, FB, hoc est, ut DB ad FB. Jam verò, ductâ horizontali FH, & positâ IH mediâ proportionali inter BH, & CH, ostensum est tempus per FB esse ad tempus, quo corpus continuato motu, & nihil per flexum B ei de velocitate acquisitâ detractò describit BC, ut est FB ad BI. Quare erit ex æquo ordinando, tempus per AB ad tempus, quo continuato motu describitur BC, ut est DB ad BI.

Speciatim autem, si planum alterum BC FIG. 71. fuerit horizontale, & corpus continuato motu utrumque planum describat; erit tempus per AB ad tempus per BC, ut est DB ad semissem ipsius BC. Nam tempus per AB est ad tempus per FB in subduplicatâ ratione ipsarum AB, FB, hoc est, ut DB ad FB. Ostensum est autem, tempus per FB esse ad tempus, quo corpus velocitate acquisitâ per FB describit æquabiliter BC, ut est FB ad semissem ipsius BC. Quare erit ex æquo ordinando, ut tempus per AB ad tempus, quo continuato motu describitur BC, ita DB ad semissem ipsius BC.

Sit BE semissem iste. Itaque tempus per AB ad tempus per BC erit, ut DB ad BE; atque

adeo componendo tempus per AB erit ad tempus per AB, BC, ut est DB ad DE, sive etiam, assumptâ communi altitudine AB, ut est rectangulum ABD ad rectangulum ex AB in DE. Jam autem tempus per AB est ad tempus per AC, ut est AB ad AC, hoc est, communem capiendo altitudinem BD, ut est rectangulum ABD ad rectangulum ex AC in BD. Igitur ex æquali ordinando tempus per AC erit ad tempus per AB, BC, ut est rectangulum ex AC in BD ad rectangulum ex AB in DE, hoc est in ratione compositâ ex AC ad AB, & ex BD ad DE.

Erigatur jam ex puncto E perpendicularis EG, quæ conveniat cum AB productâ in puncto G. Et quoniam, propter similitudinem triangulorum BDA, BEG, BD est ad BE, ut AB ad BG; erit componendo, ut BD ad DE, ita AB ad AG. Ostensum est autem tempus per AC esse ad tempus per AB, BC in ratione compositâ ex AC ad AB, & ex BD ad DE. Quare erit etiam tempus per AC ad tempus per AB, BC in ratione compositâ ex AC ad AB, & ex AB ad AG; atque adeò in simplici illâ ratione, quam habet AC ad AG.

Hinc siquidem AC æqualis fuerit AG, tempus descensus per AC æquale erit tempori, quo continuato motu describerentur plana duo AB, BC. Fieri autem posse, ut
AC

AC adæquet AG, facile patebit, si consideremus, locum puncti G esse in hyperbolâ positione datâ. Sectis enim AD, CD bifariam in H, & I, ductisque HM, LN iisdem CD, AD parallelis, dabitur positione hyperbola, quæ habens pro suis asymptotis rectas LM, LN transibit per punctum positione datum C: atqui in istâ hyperbolâ punctum G suum quoque locum habebit.

Etenim, quum CI sit semissis ipsius CD, & CE semissis ipsius BC; erit EI, sive GN semissis reliquæ DB. Jam verò, propter similitudinem triangulorum BDA, BEG, AD est ad EG, sive IN, ut DB ad BE, sive EC. Quare sumptis antecedentium semissibus, erit ut DH, sive LI ad IN, ita EI, sive GN ad EC. Unde, quia componendo LI est ad LN, ut GN ad CI; erit rectangulum LIC æquale rectangulo LNG: proindeque punctum G erit in hyperbolâ, quæ habens pro suis asymptotis rectas LM, LN transibit per punctum C.

Ex eo autem, quod punctum G sit in huiusmodi hyperbolâ, facile erit ostendere, fieri quandoque posse, ut AC adæquet AG. Etenim, si AD minor fuerit, quàm CD, circulus, qui describitur centro A, intervalloque AC, non modò occurret hyperbolæ in puncto C, verùm etiam portionem ejus existentem intra angulum CLN in alio puncto

secabit. Unde, si fuerit G aliud hoc punctum sectionis, ob naturam circuli erit AC æqualis AG .

Necesse est verò, ut AD minor sit, quàm CD . Nam primò si fuerit AD æqualis CD , fiet AC axis hyperbolæ; quia transiens per punctum L , bisecabit angulum MLN ; atque aded, quum AC sit minima omnium linearum, quæ à puncto A ad hyperbolæ perimetrum ducuntur, circulus centro A , & intervallo AC descriptus continget hyperbolam in vertice principali C , nec eam secabit. Et secundò, si fuerit AD major, quàm CD , prædictus circulus secabit in alio puncto portionem hyperbolæ existentem intra angulum CLM ; atque aded ad eam, quæ existit intra angulum CLN , nulla recta linea duci poterit ex puncto A , quæ sit æqualis ipsi AC .

Itaque tunc demum AC ipsi AG æqualis esse potest, quotiescumque AD minor est quàm CD . Sed hoc casu perspicuum est, fieri quoque posse, ut AC major sit, quàm AG ; atque aded, ut breviori tempore percurrat corpus continuato motu plana duo AB , BC , quàm planum solum AC . Ex quo patet, quod quum grave corpus ex puncto sublimi A descendere debet ad punctum C , estque AD minor, quàm CD , inveniri semper possit tale aliud planum AB , ut breviori tempore accedat corpus ad datum locum
per

per plana duo AB , BC , quam per planum solum AC .

Positio autem hujus plani multiplex esse potest; nam si centro A , intervalloque AC circulus describatur, omnes rectæ lineæ, quæ à puncto A ad interceptam intra circum-
lum portionem hyperbolæ ducuntur, minores erunt, quàm AC ; adeòque quælibet harum linearum quæsitæ plani positionem determinabit. Quod si verò planum AB tale esse debeat, ut accedendo corpus ad datum locum per plana duo AB , BC minus temporis impendat, quàm si per alia duo ejusmodi plana ad eundem locum accederet; perspicuum est, eò rem redire, ut ex puncto A ad hyperbolam CG perpendicularis demittatur, quandoquidem velut minima omnium linearum, quæ à puncto A ad hyperbolæ perimetrum ducuntur, quæsitæ plani positionem exhibebit.

Hoc problema de ducendâ rectâ lineâ ex puncto extra hyperbolæ perimetrum dato, quæ hyperbolam ipsam ad rectos angulos offendat, solutionem accepit à Domino de La Hire, mediante ipsâ hyperbolâ datâ, & circuli circumferentiâ: qua in re imitatus est doctissimum Christianum Hugenum, qui idem problema solvit olim in parabolâ intersectione datæ parabolæ, & circuli circumferentiæ. Verùm solutio Hiriana, utpo te ge-

neralis, nonnihil difficilis, & involuta deprehenditur. Unde aliam hinc exhibebimus, quæ nostro casui tantum accomodata, facilis erit, ac expedita.

Nimirum sit AG recta linea, quæ hyperbolam CG ad rectos angulos secat, & ductâ ad punctum G tangente GO , protrahatur GE usque in R . Quia ergo angulus KGO rectus est, erunt KR , RG , RO continuè proportionales; adedque erit, ut KR ad RO , si-
vè LR , ita KR quadratum ad RG quadratum, si-
ve etiam, ita DB quadratum ad AD quadratum. Jam verò, quum DB dupla sit tam ipsius HK , quàm ipsius EI , si-
ve LR , est HK æqualis LR , atque aded HL æqualis KR . Quare erit, ut HL ad LR , hoc est ut DI ad IE , ita DB quadratum ad AD quadratum. Sunt autem DC , DB dupla ipsarum DI , IE ; & consequenter DI est ad IE , ut DC ad DB . Itaque erit ex æquali, ut DC ad DB , ita DB quadratum ad AD quadratum; & propterea DB erit prima ex duabus mediis proportionalibus inter AD , & DC .

Hinc, quum positio rectæ AG determinetur per punctum B , solvetur problema, faciendū, ut recta DB sit prima ex duabus mediis proportionalibus inter AD , & DC . Neq; verò id factū difficile erit per ipsâ hyperbolam datam, & circuli circumferentiam. Nam

figui-

siquidem super rectâ LC velut diametro circulus describatur, hic hyperbolam secabit nō solūm in C , verūm etiam in alio puncto. Unde si ex hoc altero puncto perpendicularis ad asymptotum LN demittatur, erit ista prima ex duabus mediis proportionalibus inter LI , & IC ; adeoque ejus duplum dabit primam ex duabus mediis proportionalibus inter AD , & DC .

Itaque, si AC designet tempus descensus per AC , ductâ AG , quæ descriptam hyperbolam secet in G , designabit AG tempus, quo continuato motu describeret corpus plana duo AB, BC . Ex quo liquet, hujusmodi tempus esse semper finitum, quotiescumq; plana duo AB , BC mutuo occurſu obliquum angulum cōstituunt, quum recta AG sit semper finitæ magnitudinis. Verum si angulus sub iis planis comprehensus fuerit rectus, tunc ad peragrandâ plana illa tempus requireretur infinitum; quandoquidem recta AG , velut parallela asymptoto LN , in infinitâ distantia occurreret hyperbolæ: id, quod etiam exinde colligi potest, quia quum rectus est angulus ABC , sinus complementi ejus anguli fit nullus, adeoque nulla est etiam velocitas, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC .

Verum enim verò, etsi falsum omnino sit, quod grave corpus in ingressu per planum

num alterum eandem retineat velocitatem, quam in descensu per planum primum sibi comparavit, neque aded dici possit, quod descendendo grave corpus continuato motu per plura plana contigua eandem in fine velocitatem acquirat, ac si ex pari altitudine descenderet: attamen notante eodem Petro Varignonio res secus se habet, quum agitur de planis curvilineis; quandoquidem si grave corpus per unum idemque planum curvilineum descendat, nihil velocitatis acquirit, amittet unquam, eandemque aded in fine velocitatem retinebit, quam sibi comparasset, si ex pari altitudine rectâ descendisset.

FIG. 72. Id autem mirum videri non debet. Colligitur enim ex ipso theoremate generali, quod si grave corpus describat plana duo AB, BC continuato motu, velocitas in descensu per planum primum AB acquisita sit ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC, ut est radius, sive sinus totus ad sinum complementi anguli ABC, sive ABD. Nam quemadmodum, quum angulus ABD rectus est, sinus sui complementi evanescit, atque aded nulla est velocitas, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC; ita quoque quum angulus ABD minuitur in infinitum, sinus sui complementi differt à radio, sive sinu toto quantitate indefinitè parvâ, adedque illa eadem
ferè

ferè velocitate, quam sibi comparavit corpus descendendo per planum primum AB, ingrediatur planum alterum BC.

Hunc verò casum sibi locum vindicare in planis curvilineis, perspicuum quidem est; quandoquidem lineæ curvæ non aliter considerari solent à Geometris, quam velut polygona laterum infinitorum, quorum unumquodque sit indefinitè parvum, quæque ita quidem ad se mutuò inclinentur, ut anguli exteriores sint indefinitè parvi adeoque quum grave corpus descendit per planum aliquod curvilineum, perinde erit, ac si descenderet continuato motu per infinita plana rectilinea indefinitæ parvitatæ, quæ mutuò occursu tales angulos constituunt, ut qui iis deinceps sunt, velut indefinitè parvi debeant haberi.

Sed hinc facilè alicui difficultas haud contemnenda orietur: nimirum, quod etsi verissimum sit, grave corpus eadem ferè velocitate ingredi secundum planum BC, quam sibi comparavit in descensu per planum primum AB, quotiescumque angulus ABD est indefinitè parvus; non hinc tamen colligi possit, quod descendendo idem grave corpus per planum aliquod curvilineum, debeat in fine eandem velocitatem retinere, quam sibi comparasset, si ex pari altitudine descendisset: quum in isto casu non quidem per duo, sed

sed per infinita plana rectilinea descendat: adedque, tametsi in unoquoque concursu eorum planorum exiguum velocitas acquisita decrementum patiatur; attamen, quia decrementsa ista sunt numero infinita, summa omnium eorum aliquid finitum, & sensibile tandem constituet.

Verum huic difficultati facile fiet satis, si consideremus decrementum, quod patitur velocitas acquisita in unoquoque concursu eorum planorum, esse infinitesimam secundi generis. Sint enim AB , BC duo ex illiusmodi planis, ita ut angulus exterior ABD sit indefinitè parvus. Describatur ex puncto B tamquam centro semicirculus CAE , & demittatur super CE perpendicularis AD , quæ propter angulum indefinitè parvum ABD erit itidem indefinitè parva. Itaque velocitas acquisita in descensu per planum primum AB erit ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC , ut est AB ad BD : proindeque, si AB designet velocitatem acquisitam in descensu per AB , designabit DE decrementum, quod illa patitur in concursu planorum. Sed DE est infinitesima secundi generis, quum propter circulum CD sit ad AD , ut est AD ad DE . Itaque ipsum illud decrementum erit etiam infinitesima secundi generis; adeoque summa ex infinitis illiusmodi decrementis erit in-

infinitesima generis primi ; nec proinde aliquid finitum , & sensibile constituet.

Cæterum , quemadmodum quum grave corpus descendit per planum aliquod curvilineum , nihil de velocitate acquisitâ unquam amittit , adedque in fine eandem retinet velocitatem , quam sibi comparasset , si ex pari altitudine rectâ descendisset ; ita hoc idem obtinet quoque , si corpus continuato motu ex tangente transeat in planum curvilineum , aut vice versâ , quum angulus contactus in curvis omnibus omni angulo acuto rectilineo minor à Geometris ostendatur. Unde colligere pronum est , quod vis , qua grave acceleratur in descensu per aliquam curvam lineam , eadem sit , ac si per tangentem ejus curvæ , aut etiam per aliam rectam lineam tangenti parallelam descenderet.

C A P. IV.

*De motu pendulorum per arcus circulares
oscillantium.*

Pendulum vocatur grave aliquod corpus , quod filo tenuissimo ex puncto aliquo suspenditur , & circa idem fixum , & FIG. 73.
immobile revolvitur : veluti est grave A ,
quod ex puncto B suspensum mediante filo
AB,

AB, ita redituque describit circa idem punctum, tamquam centrum, arcum CAD. Per spicuum est autem huic gravi eundem planè motum accidere, ac si in superficie sphaerica CAD perfectè durâ, ac levigatâ idem grave corpus moveretur; quandoquidem hîc supponimus, nec aerem pendulorum motui obstare, nec ullam esse frictionem circa centrum rotationis B. Unde ex iis, quæ superius ostensa sunt, facile erit pendulorum per circulares arcus excurrentium affectiones derivare.

Et primò quidem semotis, ut dictum est, omnibus impedimentis pendulum AB eundo, & redeundo continuas oscillationes perficiet in peripheria CAD. Id autem ut meliùs intelligatur, notandum est prius, quod in hypothesei gravitatis constantis, quemadmodum descensus gravium est motus æquabiliter acceleratus, ita ascensus eorundem gravium est motus æquabiliter retardatus. Nam vis gravitatis continuè, & æqualiter agens, sicuti motum inceptum gravis descendens æqualibus temporibus æqualiter auget, quum suam exerceat actionem secundum eandem directionem, qua perficitur motus gravis descendens; ita vicissim motum inceptum gravis ascendens minuit semper pro temporis ratione, quum in isto casu agat contra directionem illius motus.

Hinc

Hinc siquidem grave corpus post descensum per planum aliquod BA, siue rectum, siue obliquum ad horizontem, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem, unde venit altitudinem. Nam, quum gravitas eodem semper tenore agat in corpus, siue ascendat, siue descendat; eadem erit ejus efficacia ad corporis velocitatem minuendam in ascensu, quæ est ad ipsam in descensu augendam. Ex quo sequitur, decrementum velocitatis in puncto aliquo E, dum ascendit mobile ab A ad E tantum esse, quantum fuit incrementum velocitatis acquisitum in descensu ab E ad A; ac proinde eadem erit velocitas in E post ascensum per AE, quæ erat prius in eodem puncto post descensum per BE. Unde, quum eadem sit demonstratio in omni alio loco, tolletur corpori ascendenti in puncto B velocitas omnis; adeòq; terminus, ad quem mobile ascendendo perveniet, erit illud idem punctum, ex quo prius descenderat.

Ex ipsâ autem demonstratione perspicuum est, id non modo verum esse, quum vis gravitatis ponitur ubique eadem, & constans, verum etiam in omni possibili gravitatis hypothese. Nam semper gravia ascendentia cum velocitatibus ultimò acquisitis successivè omnes velocitatis gradus servabunt in locis illis, in quibus cadendo eos

acquissiverunt : proindeque semotis omnibus impedimentis ad eam ipsam altitudinem assurgent, ex qua prius descensum inchoarunt. Sed patet quoque, id non solum sibi locum vindicare, quum corpora recta in altum feruntur, verum etiam, quum in curvis quibuscumque ascendunt; enim verò quemadmodum curvitas nihil officit descensui gravium, ita neque etiam potest esse impedimento eorundem ascensui.

Ex quibus modò facile erit ostendere, pendulum AB eundo, & redeundo continuas oscillationes in peripheria CAD perficere debere, quotiescumque nec aer ejus motui obstat, nec circa punctum rotationis B ulla fit frictio. Nam, delato pendulo ad situm BC, & exinde demisso, describet grave descendendo arcum CA, & in puncto A eam habebit velocitatem, quæ acquiritur cadendo per EA. Hac autem velocitate etsi per tangentem in A exire conetur, attamen quum detineatur per filum in peripheriâ CAD, ascendet ope illius velocitatis per arcum AD ad eandem altitudinem, ex qua decidit, scilicet ad punctum D. Unde, quum suâ gravitate rursus incipiat descendere, acquirat in puncto A denuò priorem velocitatem, cum qua ascendet ad C: proindeque ascendendo, & descendendo per arcum CAD continuò pendulum oscillabitur.

Forent autem in æternum duraturæ penduli oscillationes, si, ut dictum est, nec aer ejus motui obstaret, nec ulla fieret frictio circa punctum rotationis B. Verùm hisce de causis, tametsi insensibiliter, minuitur aliquantulum singulis oscillationibus penduli velocitas in puncto infimo A: ex quo fit, ut non ad idem præcisè punctum redeat grave corpus, ex quo priùs discefferat, sed arcus, in quos excurrit continuò, reddantur breviores, donec tandem insensibiles evadant. Unde rectè observavit Vir Eximius Isaac Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis, quod ut experimentum pendulorum congruat adamussim cum theoriis de congressu corporum, habenda sit ratio resistantiæ aeris, per quam pendula in descensu retardantur.

Secunda proprietas penduli, per arcus circulares oscillantis, hæc est, quod velocitas ejus in puncto infimo sit, ut subtenfa arcus, quem descendendo describit. Sit enim pendulum BA, quod motu suo describat circulum ACDG. Dico, velocitatem acquisitam in descensu per arcum CA esse ad velocitatem acquisitam in descensu per arcum DA, ut est chorda arcus prioris ad chordam arcus alterius. Demittantur namque super BA perpendicula CE, DF; jamque velocitates acquisitæ in descensu per

FIG. 74.

arcus CA , DA illæ eadem erunt, quæ acquiruntur in descensu per altitudines EA , FA . Unde eò res redit, ut ostendamus, velocitatem acquisitam in descensu per EA esse ad velocitatem acquisitam in descensu per FA , ut est chorda arcus CA ad chordam arcus DA .

Id autem ostendetur hac ratione. Quoniam angulus ACG , velut in semicirculo existens, rectus est, erit chorda CA media proportionalis inter AG , & AE : proindeq; quadratum ex CA æquale erit rectangulo EAG . Similiter ostendemus, quadratum ex DA æquale esse rectangulo FAG . Quare erit, ut quadratum ex CA ad quadratum ex DA , ita rectangulum EAG ad rectangulum FAG . Sed propter communem altitudinem AG , rectangulum EAG est ad rectangulum FAG , ut EA ad FA . Itaque erit ex æquali, ut quadratum ex CA ad quadratum ex DA , ita EA ad FA . Sunt igitur chordæ CA , DA in subduplicatâ ratione ipsarum EA , FA . Atqui in earundem subduplicatâ ratione sunt etiam velocitates, quæ acquiruntur in descensu per ipsas EA , FA . Quare ex æquali velocitates istæ erunt quoque inter se, ut chordæ CA , DA .

Ex hac proprietate illud perspicuum fit, quod si capiantur arcus A_1 , A_2 , A_3 , A_4 &c. talis longitudinis, ut eorum subtensæ sint,

sint, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, &c. respectivè; & pendulum diversis viribus sursum impellatur per arcus illos, hoc est ab unâ vi per arcum A1, ab aliâ per arcum A2, atque ita deinceps; quod inquam velocitates ab iis viribus pendulo impressæ in puncto A sint in ratione numerorum naturalium. Unde modò facilè erit, machinam conficere, in qua per experimenta pendulorum comprobari possint leges, quæ in congressu corporum observantur.

FIG. 75.

Construatur namque triangulum ligneum ABC, & prope angulum A capiantur duo puncta D, & E ita quidem distantia inter se, ut pendula duo DF, EG, quæ ex illis liberè pendent, se mutuò contingant. Tum ex punctis illis D, & E velut centris, intervallisque DF, EG describantur arcus FH, GI, & sumantur tam in arcu FH portiones F1, F2, F3, F4 &c., quàm in arcu GI portiones G1, G2, G3, G4 &c. talis longitudinis, ut earum subtensæ sint, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, &c. respectivè; jamque ope hujus machinæ facilè erit, experientiæ subicere leges cōgressuum, quas superiùs demonstratas exhibuimus.

Etenim si grave F in arcu suo FH ad punctum 5 attollatur, & grave G in arcu suo GI trahatur ad punctum 3, eaque simul demittantur; per quartam pendulorum

in arcus circulares oscillantium proprietatem mox ostendendam perveniens simul, & eodem tempore ad puncta infima; & velocitates, quibus sese percutiunt, per proprietatem secundam jam demonstratam, erunt ut numeri 5, & 3. Quod si post ictum grave F ascendat in arcu suo FH ad punctum 3, & grave G in arcu suo GI ad punctum 5; concludendum erit, velocitates gravium post congressum esse, ut 3, & 5 respectivè, & motus eorundem esse contrarios, perinde ac erant ante congressum.

FIG. 76.

Tertia proprietas pendulorum per arcus circulares oscillantium est, quod tempora oscillationum duorum pendulorum in similes arcus excurrentium sint in subduplicatâ ratione suarum longitudinum: nimirum si AB, AC sint duo pendula, quæ suas oscillationes perficiant in arcubus similibus DE, FG; erit tempus oscillationis penduli AB ad tempus oscillationis penduli AC in subduplicatâ ratione ipsarum AB, AC. Id autem ut ostendamus, præmittendum est prius hoc lemma, quod si duo gravia descendant super duobus, aut pluribus planis proportionalibus, & similiter ad horizontem inclinatis; tempora, quæ in iis percurrentis impenduntur, sint in subduplicatâ eorundem ratione.

Percurrat etenim grave aliquod plana AB,

AB, BC, quæ sint proportionalia, & similiter ad horizontem inclinata cum planis DE, EF, quæ ab altero gravi percurrantur: ita, ut AB sit ad BC, ut est DE ad EF, ductisque horizontalibus AG, DH æquales sint tum anguli BAG, EDH, tum anguli AGB, DHE. Dico tempus, quo percurruntur plana duo AB, BC, esse ad tempus, quo alia duo plana DE, EF peragrantur, in subduplicatâ ratione longitudinum eorundem planorum.

Ponamus primò, concursus planorum non impedire motus gravium descendendum, sed tantum eorundem directionem mutare. Quia igitur triangula ABG, DEH æquiangula sunt, erit ut AB ad BG, ita DE ad EH. Est autem ex hypothesis ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare erit ex æquali, ut BG ad BC, ita EH ad EF; atque adeò componendo, & permutando GC erit ad HF, ut BG ad EH, sive etiam, ut AB ad DE.

Et quoniam plana AB, DE velut similiter ad horizontem inclinata eodem prorsus modo percurruntur, ac si partes essent ejusdē plani, erit tempus per AB ad tempus per DE in subduplicatâ ratione ipsarum AB, DE. Est autem ob eandem rationem in hac eâdem subduplicatâ ratione, tam tempus per GC ad tempus per HF, quàm tempus per BG ad tempus per EH. Quare, quum divi-

77.212 dendo in eâdem adhuc subduplicatâ ratione sit tempus per BC post descensum ex G, vel A ad tempus per EF post descensum ex H, vel D; erit ex æquali, ut tempus per AB ad tempus per DE, ita tempus per BC ad tempus per EF.

Hinc permutando, componendo, & rursus permutando erit, ut tempus per AB, BC ad tempus per DE, EF, ita tempus per AB ad tempus per DE. Sed tempus per AB est ad tempus per DE in subduplicatâ ratione ipsarum AB, DE; & AB est ad DE, ut AB, BC ad DE, EF. Igitur ex æquali tempus, quo percurruntur continuato motu plana duo AB, BC, erit ad tempus, quo motu similiter continuato peragantur alia duo plana DE, EF, in subduplicatâ ratione longitudinum ipsorum planorum.

Ponamus secundo, concursus planorum impedimento esse motibus gravium, jamque demissis super BG, EH perpendicularibus AI, DK, æquiangula adhuc erunt triangula ABI, DEK; adeoque erit, ut AB ad BI, ita DE ad EK. Est autem ex hypothesis, ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare erit ex æquali ut BI ad BC, ita EK ad EF; atque adeo componendo, & permutando IC erit ad KF, ut BI ad EK, sive etiam, ut AB ad DE.

Unde modò facile erit in hac etiam hypothesis

pothefi lemma propositum ostendere. Nam quemadmodum, quum concursus planorum nequaquam impediunt motus gravium, plana BC, EF, perinde percurruntur à gravibus post descensum ex A, & D; ac si descendissent ex G, & H; ita quoque, quum concursus planorum impedimento sunt motibus gravium, eadem plana BC, EF perinde percurrentur post descensum ex A, & D, ac si descendissent gravia ex I, & K.

Idem autem eadem ratione ostendetur, si plura essent utrobique plana proportionalia, & similiter ad horizontem inclinata. Ex quo illud colligi potest, quod si fuerint duo plana curvilinea DB, FC similia, & similiter posita, tempora descensus per plana illa sint in subduplicatâ ratione suarum longitudinum; quandoquidem plana illa curvilinea considerari possunt, velut infinita numero plana rectilinea indefinitæ parvitatîs, proportionalia, & similiter ad horizontem inclinata.

FIG. 76.

Atque hinc modò sponte suâ sequitur proprietas pendulorum superius posita. Nam, quum arcus DB, FC sint similes, & similiter positi, erit ex ostensis tempus descensus per DB ad tempus descensus per FC in subduplicatâ ratione ipsorum DB, FC, sive etiam DE, FG. Sed tempus descensus per DB est dimidium temporis, quo

perficitur oscillatio integra in arcu DE; atque ita quoque tempus descensus per FC est dimidium temporis, quo in arcu FG integra absolvitur oscillatio. Quare tempus oscillationis penduli AB erit ad tempus oscillationis penduli AC in subduplicatâ ratione arcuum DE, FG, in quibus oscillationes absolvuntur; atque aded in subduplicatâ ratione ipsarum longitudinum AB, AC; quum propter arcus similes DE, FG, AB sit ad AC, ut est DE ad FG.

Ex hac pendulorum proprietate haud difficile erit, dato numero oscillationum, quæ ab uno pendulo AB notæ longitudinis in dato tempore perficiuntur, invenire numerum oscillationum, quæ ab alio quovis pendulo AC notæ similiter longitudinis in eodem tempore perficientur. Est quippe tempus unius oscillationis reciprocè, ut numerus oscillationum dato tempore peractarum. Ostensum est autem, idem tempus esse, ut longitudo penduli oscillantis subduplicatè. Quare numeri oscillationum, quæ à duobus quibuscvis pendulis in dato tempore perficiuntur, erunt in ratione reciproca subduplicatâ suarum longitudinum; & propterea si inventâ mediâ proportionali inter AB, & AC, fiat ut media ista ad AB, ita numerus oscillationum penduli AB ad quartum, habebitur numerus oscillationum penduli AC.

Vicissim verò datis numeris oscillationum, quæ perficiuntur in eodem tempore à pendulis AB, AC, datâque longitudine penduli unius, velut AB, licebit invenire longitudinem alterius penduli AC: nimirum faciendo, ut quadratum numeri oscillationum penduli AC ad quadratum numeri oscillationum penduli AB, ita longitudo data AB ad longitudinem quæsitam CD.

Cæterum hæc pendulorum proprietas, ut liquet ex ipsâ demonstratione, propriè sibi locum vindicat, quum oscillationes fiunt in arcubus similibus. Interim, si arcus, in quibus pendula oscillantur, non sint nimis magni, obtinebit præter propter proprietas ista, tametsi arcus oscillationum non sint similes: idque ob quartam, & ultimam pendulorum proprietatem, quod ejusdem penduli vibrationes exiguæ, etsi inæquales, ad sensum sint isochronæ, sive æquidiuturnæ.

Sic namque pendulum BA, quod oscillando describat arcus inæquales CAD, EAF. Dico æqualia ferè tempora in illis describendis infumi, hoc est oscillationem in arcu CAD fieri eodem ferè tempore, quo perficitur oscillatio in arcu EAF, dummodo arcus illi non sint nimis magni. Nam, propter exiguitatem arcuum CA, EA, ii nec longitudine, nec declivitate multum à chordis suis deflectunt: proindeque grave paria
ferè

FIG. 78

ferè infumet tempora, five per arcus CA, EA, five per chordas illorum feratur. Sed tempora descensus per eorum arcuum chordas ex superiùs ostensis æqualia sunt. Quare æqualia fere erunt etiam tempora per arcus CA, EA. Sunt autem horum temporum dupla illa, quibus pendulum oscillando describit arcus inæquales CAD, EAF. Igitur & ista quoque tempora ferè æqualia erunt.

Postremam hanc pendulorum proprietatem confirmat etiam experientia. Si enim capiantur pendula duo æqualis longitudinis, eaque ad motum concitentur subinde, ut unum in multò majores excurret arcus, quàm alterum; comperietur hujusmodi pendula ferè æqualia habere tempora oscillationum: aded, ut in centum oscillationibus vix erit discrepantia temporis unius oscillationis. Ejusdem autem proprietatis beneficio adhibuit primus omnium Galilæus pendula in observationibus physicis, & astronomicis, quæ accuratam temporis mensuram requirunt; cujus exemplo ductus Hugenus horologia ipsa automata pendulis instruxit, & experientia comprobavit hujusmodi horologia longe superare priora illa, quorum libratores horizontales erant.

Etsi autem hujusmodi horologia pendu-
lis

lis instructa iis, quæ prius in usu erant, valdè essent accuratiora, quin & aliqua fuissent adeò affabrè elaborata, ut temporis mensuram exhiberent motu Solis multò iustiore, qui monstrat solummodò tempus apparens, ac relativum, non autem verum & absolutum; nihilominus non eò res redacta erat, ut exacta temporis mensura haberetur. Quamvis enim ejusdem penduli oscillationes exiguæ fere, & ad sensum sint æquidiurnæ; quia tamen non sunt omnimodè & geometricè tales, sed majores minoribus sunt aliquantulum diuturniores, erit semper inter singulas oscillationes exigua quædam differentia, ex quibus omnibus differentiis conflatur tandem differentia satis magna, ut ipsa evincit experientia.

Quocirca, ut pendulorum oscillationes ad omnimodam æqualitatem redigerentur, & tam majorum, quàm minorum tempora perfectè essent æqualia, novum protulit inventum laudatus Hugenus numquam satis commendandum: nimirum, quum demonstraverit, tempora descensus per arcus cycloidis, cujus vertex est punctum imum, inter se æqualia esse; collegit isochronas esse pendulorum oscillationes omnes, si utique non in circumferentiæ circuli, sed in cycloidis arcubus perficerentur. Unde methodum excogitavit, qua mediante posset grave

ve pendulum per cycloidis perimetrum ferri. Quæ tamen omnia ut meliùs intelligantur à Tyronibus, quibus hæc scribimus, præmittenda sunt priùs nonnullâ de naturâ & proprietatibus cycloidis.

C A P. V.

De naturâ, & proprietatibus cycloidis; ubi etiam de epicycloide, tum internâ, cum externâ.

Fig. 79.

UT curvæ, cyclois dictæ, claram distinctamque ideam Lectoribus nostris hoc loco exhibeamus, concipiatur in plano aliquo circulus AEB, cujus centrum sit punctum C; diameter recta AB. Revolvatur circulus iste super rectâ positione datâ DBD, quam in primâ sui positione unâ diametri extremitate A contingat in D, idque usque donec eidem occurrat puncto B, diametri extremitate alterâ. Et quoniam circulus prædictus super rectâ illâ duplici motu fertur, uno progressivo, & altero circulari; prior diametri extremitas A, subiens utrumque motum, designabit in eodem illo plano lineam curvam DNA, quæ erit cycloidis pars dimidia. Et siquidem idem circulus super eâdem rectâ ulterius pergat revolvî, donec integram revolutionem perficiat; habea-

habebitur cyclois integra DAD, cujus basis dicetur recta DD, vertex punctum A, axis recta AB normalis ad basim, & circulus genitor ipse ille, per cujus revolutionem cyclois describitur, quique circa cycloidis axem, velut diametrum, describi solet.

Jam verò sicuti ex ipsâ curvæ genesi ultrò liquet, rectam BD, basim semicycloidis AND, æqualem esse circumferentiæ semicirculi genitoris AEB, ita quoque non obscure colligi potest, quod si ex quovis axis puncto M perpendicularis erigatur MN, portio ejus EN, circumferentiâ, & semicycloide comprehensa, adæquet arcum correspondentem AE. Nam, si semicirculus AEB concipiatur perventus ad positionem NFB, erit arcus BF æqualis rectæ BF, & arcus FN æqualis rectæ DF. Sed erectâ ex puncto contactus F perpendiculari FG, quia ea transit per centrum semicirculi C, æquales erunt tam rectæ BC, FC, quàm rectæ CM, CG; & consequenter æquales etiam erunt tam rectæ ME, GN, quàm rectæ MG, EN. Itaque erit quoque, tum EN æqualis BF, tum chorda FN æqualis chordæ BE; atque aded æquales etiam inter se, tam arcus BE, FN, quàm arcus AE, BF. Est autem arcus BF æqualis rectæ BF, sive EN. Et igitur eadem EN adæquabit quoque arcum AE.

Unde patet, descriptæ semicycloidis AND hanc

FIG. 80.

hanc esse proprietatem præcipuam, ut quælibet ejus ordinata MN adæquet arcum correspondentem AE unâ cum sinu ejus ME : proindeque circuli rectificatione suppositâ, facile erit, semicycloidem in plano per puncta describere. Sed patet etiam, cycloidem esse ex numero curvarum, quæ mechanicæ, sive transcendentes, aut geometricè irrationales dicuntur; quandoquidem relatio, quam habet in eâ abscissa AM ad ordinatam correspondentem MN , inveniri nequit, nisi inventâ priùs relatione, quam habet eadem abscissa AM ad arcum correspondentem AE , quæque per æquationem ad infinitas dimensiones ascendente definitur. Quod exinde quoque colligi potest, quia circulus genitor, completâ suâ primâ revolutione, potest circumvolutiones alias super eâdem rectâ lineâ continuò efficere, atque ita alias, atque alias cycloides in infinitum describere. Etenim, quum omnes istæ cycloides, unicam constituentem curvam lineam, in infinito punctorum numero à rectâ secari possint; erit curva ex iis composita generis infinitesimi, atque adeò localis ejus æquatio ad infinitas dimensiones ascendet.

Ex præcipuâ autem semicycloidis proprietate sequitur, quod si recta NT contingat cycloidem in N , eique perpendicularis demittatur FN , tangens quidem NT parallel-

rallela sit chordæ AE , perpendicularis autem FN parallela chordæ BE . Etenim, si ad circumferentiæ punctum E ducatur tangens TE , quæ conveniat cum NT in puncto T , & concipiatur ordinata alia PQR , priori MN indefinitè proxima, ita ut portiones indefinitè parvæ QE , RN sumi possint, velut portiones tangentium TE , TN ; ductâ quidem ex puncto R rectâ RS ipsi TE parallela, erit ob proprietatem cycloidis QE , sive RS æqualis SN , atque adeò TE æqualis EN , quum similia sint triangula TEN , RSN . Unde, quum angulus TEM , tamquam exterior, duplus fiat anguli TNE , idemque propter tangentem DE duplus etiam sit anguli AEM ; erit angulus AEM æqualis angulo TNE , & consequenter recta TN ipsi AE parallela erit. Est autem uterque angulorum AEB , TNF rectus. Quare erit etiam angulus BEM æqualis angulo FNE , atque adeo recta FN ipsi BE parallela erit.

Unde modò facile erit, omnes alias cycloidis proprietates, quæ ad ejus rectificationem & quadraturam spectant, derivare. Ordinemur autem à rectificatione: nempe, quod quælibet cycloidis portio AN dupla sit chordæ correspondentis AE , atque adeò semicyclois ipsa AND dupla sit diametri circuli genitoris AB . Nam iisdem, ut supra, positis, quum $ELRN$ sit parallelogrammum, erit
por-

portio cycloidis indefinitè parva NR æqualis exiguæ rectæ EL . Jam verò propter angulum TEM bisectum per chordam AE , æquicrura est triangulum indefinitè parvum EQL ; atque adeò si centro A intervalloque AQ describatur arcus QX , vel quod idem est demittatur ex puncto Q super EL perpendicularis QX , hæc dividet bifariam in X ipsam EL . Itaque eadem cycloidis portio NR dupla erit portionis EX , quæ est differentia chordarum AE , AQ ; & consequenter, quum hæc ratio dupla inveniat, quocumque in loco capiatur ordinata MN , erunt singulæ portiones indefinitè parvæ, ex quibus componitur portio cycloidis AN , duplæ singularum differentiarum, quæ inter chordas correspondentes existunt. Unde facile erit colligere, ipsam cycloidis portionem AN duplam esse chordæ correspondentis AE ; nam quum ultima chorda evanescat, omnes illæ chordarum differentiæ simul sumptæ priorem AE adæquabunt.

Ostensâ cycloidis rectificatione, ad ejus quadraturam gradum facimus, circa quam plura à Geometris theoremata sunt inventa. Et primo iisdem, ut suprâ, semper

FIG. 81. manentibus, si compleatur rectangulum $AMNK$, erit spatium cycloidale externum ANK æquale spatio circulari correspon-

den-

denti AEM . Nam si per punctum R ducatur recta IO , axi AB parallela, triangula RON , AME similia fient inter se; eritque adeo, ut RO , five PM ad ON , ita AM , five KN ad ME . Quare erit rectangulum KNO æquale rectangulo PME ; & propterea, quia ab hisce rectangulis non differunt sensibilibiter areolæ $KNRI$, $PMEQ$, erit etiam areola $KNRI$ æqualis areolæ $PMEQ$. Sed hæc areolarum æqualitas reperitur quocumque in loco ducatur ordinata MN . Itaque componendo erit totum spatium cycloidale externum ANK æquale spatio circulari correspondenti AEM .

Jam completo rectangulo $ABDH$, ob eandem rationem erit totum spatium cycloidale externum ADH æquale semicirculo AEB . Unde, quia rectangulum $ABDH$, veluti factum ex diametro semicirculi AB in circumferentiam ejus AEB , est quadruplū ipsius semicirculi; erit spatium cycloidale internum ADB triplum semicirculi genitoris AEB . Ex quo sequitur, spatium cycloidale intermedium duplum esse ejusdem semicirculi, vel etiam æquale semicirculo genitori AEB unā cum spatio cycloidali externo ADH .

Præterea, si compleatur rectangulum $ABGK$, quia istud fit ex AB in MN , hoc est ex AB in ME , & ex AB in EN , five ar-

cum AE , estque rectangulum ex AB in ME quadruplum trianguli BCE , & rectangulum ex AB in arcum AE quadruplum sectoris ACE ; erit idem rectangulum $ABGK$ quadruplum segmenti circularis ABE , ad chordam BE terminati. Unde, quia spatium cycloidale externum ANK est æquale spatio circulari correspondenti AEM , & triangulum NFG est æquale triangulo BEM ; his hinc inde ablati, supererit spatium cycloidale internum $ABFN$ terminatum ad rectam FN triplum segmenti circularis ABE , quod ad chordam BE terminatur; atque aded reliquum spatium cycloidale internum DNF triplum quoque erit reliqui segmenti circularis BEB .

Ex quibus omnibus jam liquet, quadraturam indefinitam spatii cycloidalis tam interni, quam externi ex circuli quadraturâ pendere, & nonnisi eâ suppositâ posse exhiberi. Sed nihilominus dantur nonnullæ portiones spatii cycloidalis interni absolutè quadrabiles. Nam primò, quum ostensum sit, spatium cycloidale internum $ABFN$ triplum esse segmenti circularis correspondentis ABE , si ponamus AB quadruplam esse ipsius AM , fiet hoc casu parallelogrammum EF triplum sectoris correspondentis ACE , atque aded spatium cycloidale internum $ABEN$ triplum trianguli BEC .

BEC. Et secundò, quia spatium cycloidale externum ANK ostensum est æquale spatio circulari correspondenti AEM, si ponamus ordinatam MN occurrere axi cycloidis AB in ipso centro C, ita ut fiat rectangulum totum AN æquale quadrato radii AC, unà cum duplo quadrantis ACE, erit spatium cycloidale intermedium AEN æquale quadrato radii AC.

Horum spatiorum, quorum valor independenter à quadraturâ circuli invenitur, primum exhibuit Hugenus, alterum notavit Leibnitius. Sed infinita alia protulit Geometra insignis Johannes Bernoullius in suo Schediasmate, quod anno 1699 inseruit Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis, quorum quidem spatiorum nonnisi casus sunt speciales spatia illa, quæ Hugenus, & Leibnitius considerarunt. Sunt autem hæc spatia Bernoulliana duplicis speciei. Etenim si in radio AC capiantur duo quævis puncta P, & M, ab ipsis A, & C æqualiter distantia, & ducantur ordinatæ MN, PR sive ad eandem, sive ad partes contrarias; exhibet laudatus Geometra quadraturam, tam spatii cycloidalis interni AMR, quàm segmenti cycloidalis RNR à rectâ NR, & cycloide ipsâ comprehensi; illud nimirum ostendendo æquale triangulo BPQ; hoc verò æquale differentiæ triangulorum BPQ, BME.

FIG. 82.

Et quidem quod attinet ad primum, nempe quod spatium cycloidale internum AMR æquale sit triangulo BPQ, ostendemus illud in hunc modum. Quoniam AP, CM ex hypothesi sunt æquales, erit semisumma rectarum AP, AM æqualis dimidio radii AC: proindeque trapetium AMRI, quum fiat ex semisummâ rectarum AP, AM in rectam AI, sive PR, erit æquale rectangulo, quod fit ex dimidio radii AC, & ordinatâ PR; sive etiam duobus rectangulis, quorum alterum fit ex dimidio radii AC in rectam PQ, alterum ex dimidio radii AC in arcum AQ; hoc est triangulo BCQ, & sectori ACQ simul sumptis; sive etiam soli segmento circulari ABQ. Est autem spatium cycloidale externum ARI æquale spatio circulari correspondenti APQ. Itaque hisce ablatis, erit reliquum spatium cycloidale internum AMR æquale triangulo BPQ.

Quod verò spectat ad secundum, nempe quod segmentum cycloidale RNR, à rectâ NR, & cycloide ipsâ comprehensum sit æquale differentiæ triangulorum BPQ, BEM, demonstrari potest illud hac ratione. Quoniam semisumma rectarum AP, AM est æqualis dimidio radii AC, erit trapetium RNKI æquale rectangulo, quod fit ex dimidio radii AC in differentiam ordinatarum MN, PR. Sed per naturam cycloidis

hu-

hujusmodi ordinatarum differentia est æqualis arcui intercepto QE unà cum differentia rectarum ME, PQ . Igitur, quia rectangulum ex dimidio radii AC in arcum QE est æquale sectori CQE , & rectangulum ex dimidio radii AC in differentiam rectarum ME, PQ est æquale differentie triangulorum BCE, BCQ ; erit idem trapetium $RNKI$ æquale sectori CQE unà cum differentia triangulorum BCE, BCQ , sive etiam soli spatio circulari BEQ : proindeque, quum segmentum spatii cycloidalis externi $IRNK$ sit æquale spatio circulari correspondenti $PQEM$; erit reliquum segmentum cycloidale internum RNR æquale differentie spatiorum circularium $BEQ, PQEM$, & consequenter differentie triangulorum BEM, BPQ .

Sed notandum hoc loco est, quod si ordinatæ PR, MN ad contrarias partes ducantur, eo casu spatium cycloidale internum, quod cum ipsâ cycloide comprehendit recta NR , non quidem differentiam, sed summam adæquet triangulorum BEM, BPQ . Nec dissimilis est hujus rei demonstratio à præcedente. Etenim, quum semisumma rectarum AP, AM sit æqualis dimidio radii AC , erit trapetium $RNKI$ æquale rectangulo, quod fit ex dimidio radii AC in summam ordinatarum MN, PR . Sed per natu-

ram cycloidis summa ordinatarum MN , PR est æqualis arcui intercepto QAE unà cum summa rectarum ME , PQ . Igitur, quia rectangulum ex dimidio radii AC in arcum QAE est æquale sectori $CQAE$, & rectangulum ex dimidio radii AC in summam rectarum ME , PQ est æquale duobus triangulis BCE , BCQ simul sumptis; erit idem trapezium $RNKI$ æquale sectori $CQAE$ unà cum duobus triangulis BCE , BCQ , hoc est toti spatio circulari $BQAE$: proindeque, quum spatia cycloidalia externa ARI , ANK ostensa sint æqualia spatiis circularibus correspondentibus AQP , AEM ; erit reliquum spatium cycloidale internum NAR æquale summæ triangulorum BME , BPQ .

FIG. 83.

Ad instar cycloidis aliam curvam lineam considerarunt Geometræ, quam epicycloidem appellarunt, utpote quæ ortum habet ex revolutione circuli super circulo alio immobili. Sit itaque DAD curva ista, quæ nempe describitur per punctum A , dum circulus AEB revolvitur super altero immobili DBD . Habeat autem circulus mobilis AEB positionem talem, ut recta AB , quæ ducitur ex puncto describente A ad punctum contractus B transeat per utriusque circuli centra C , & O . Et siquidem ex puncto O , tamquam centro, & intervallo quovis describatur arcus EN , proprietas de-

descriptæ curvæ principalis erit, ut arcus AE sit ad arcum EN, velut est radius OB ad dium OE, sive ON.

Nam, si semicirculus AEB intelligatur ad eam positionem perventus, ut circulum alium immobilem contingat in puncto F, & punctum describens A incidat super puncto N; quia recta OF producta transit per centrum C, atque adeo triangula NOC, EOC habent singula latera singulis lateribus æqualia, erit angulus NOF æqualis angulo BOE, & consequenter angulus NOE æqualis angulo BOF. Unde, quum similes sint sectores BOF, EON, erit ut arcus BF ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE. Sed per genesim ipsius curvæ arcus circuli immobilis BF est æqualis arcui circuli mobilis BF, sive AE. Igitur erit, ut arcus AE ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE. Ex quo patet, quod si centrum O abeat in infinitum, ita ut arcus concentrici BF, EN evadant lineæ rectæ, ipsaque curva AND cyclois ordinaria; quia hoc casu radii OB, OE sunt æquales, erit etiam arcus AE æqualis ipsi EN, quæ est proprietas principalis prædictæ cycloidis.

Ex eo autem, quod proprietas præcipua epicycloidis sit, ut arcus AE sit ad arcum EN, velut est radius OB ad radium OE, facile erit epicycloidem in plano per puncta

describere : scilicet, si constituto ad centrum **C** angulo quovis **ACE**, fiat ad centrum **O** angulus alter **EON**, qui sit ad illum, ut est radius **AC** ad radium **OB**, & ex puncto **O** tamquam centro, intervalloque **OE** describatur arcus **EN**, qui secet rectam **ON** in puncto **N**. Nam, quum arcus **AE** sit ad arcum **EN** in ratione compositâ ex angulo **ACE** ad angulum **EON**, & ex radio **AC** ad radium **OE**, sitque ex constructione angulus **ACE** ad angulum **EON**, ut est radius **OB** ad radium **AC**; habebit idem arcus **AE** ad arcum **EN** rationem compositam ex radio **OB** ad radium **AC**, & ex radio **AC** ad radium **OE**, adeòque rationem simplicem, quam habet **OB** ad **OE**; & consequenter punctum **N** erit in epicycloide quæsitâ.

Unde liquet, epicycloidem non esse semper mechanicam, ac naturæ transcendentis. Nam primò est geometrica, quum circulus mobilis **AEB** æqualis est circulo immobili **DBD**: etenim, quum in hoc casu æquales etiam sint radii **AC**, **OB**, invenientur epicycloidis puncta omnia semper geometricè, nimirum faciendo angulum **EON** æqualem angulo **ACE**. Et secundò est etiam naturæ geometricæ, quotiescumque radii **AC**, **OB** non quidem sunt æquales, sed rationem habent ejusmodi, quæ numeris exprimi possit: quippe tametsi hoc casu ad inveniendâ
ipſius

ipsius puncta omnia, fieri debeat angulus EON, qui sit ad angulum ACE, non quidem in ratione æqualitatis, sed ut est radius AC ad radium OB; attamen id semper fieri potest beneficio alicujus curvæ geometricæ, quotiescumque ratio radiorum AC, OB in numeris exhibetur.

Itaque reliquum est, epicycloidem DAD tunc demum esse machanicā, ac naturæ transcendens, quum ratio radiorum AC, OB nullis numeris exprimi potest. Nam, ut omnes Geometræ norunt, angulum constituere, qui ad alium angulum rationem habeat incommensurabilem, est problema mechanicum, nec ullis lineis geometricis perfici potest. Quod exinde etiam colligere licet, quia existente incommensurabili ratione radiorum AC, OB, est etiam incommensurabilis proportio circumferentiarum: proindeque, si circulus genitor, ac mobilis AEB, completā primā revolutione, intelligatur adhuc revolvi super circumferentiā alterius circuli immobilis DBD, ut faciat secundam, tertiam, quartamve revolutionem, numquam perveniet ad primum illud punctum, unde cæperat moveri, describetque aded lineam curvam, quam recta linea in infinitis numero punctis secabit.

Quemadmodum autem ex commensurabilitate, aut incommensurabilitate rationis, quæ

FIG. 83.

quæ est inter radios circulorum AC, OB, fit ut ipsa epicyclois DAD modò sit geometrica, modò mechanica; ita quoque pro triplici diversâ ratione, quæ inter eosdem radios esse potest, fit, ut eadem curva tres diversas configurationes habere possit. Nam primò, si ratio illa sit æqualitatis, ita nempe ut æquales sint radii AC, OB; quia æquales sunt etiam ipsorum circulorum circumferentiæ, circulus mobilis revolutione suâ emetietur integram circumferentiam circuli immobilis: proindeque quum in fine revolutionis incidat in illud idem punctum, unde cæperat moveri, figura epicycloidis spatium claudet, ejusque partes in cuspidem sursum spectantem conjungentur. Quod si verò ratio illa fuerit majoris inæqualitatis, subinde ut radius AC major sit radio OB; quia circumferentia circuli mobilis major erit quoque circumferentiâ circuli immobilis, ipse circulus mobilis revolutione suâ non modò emetietur integram circumferentiam circuli immobilis, verùm etiam aliquam ejus portionem; & propterea, quia in fine revolutionis incidit ultra punctum, unde cæperat moveri, epicyclois non modò claudet spatium, ut in primo casu, sed habebit quoque aliam parvam ovalem dimidiatam, cuspidi inhaerentem, eritque adeò figura nodata. Ac denique si eadem illa ratio fuerit mino-

ris inæqualitatis, ita ut radius AC minor sit Fig. 85.
radio OB ; quia circumferentia circuli mobi-
lis minor quoque erit circumferentiâ circu-
li immobilis, ipse circulus mobilis integrâ
revolutione suâ dumtaxat partem aliquam
circumferentiæ circuli immobilis emetie-
tur, atque aded epicyclois ambitu suo spa-
cium non claudet.

Hanc epicycloidem vocant Geometræ ex-
ternam, ad differentiam alterius epicycloi-
dis, quam appellant internam; utpote quæ
ex circuli intra circulum revolutione suam
genesim trahit. Habet autem hæc altera epi-
cyclois eandem omnino proprietatem cum Fig. 86.
epicycloide externâ. Sit enim AND epi-
cyclois descripta ex revolutione semicirculi
 AEB super concavitate arcus BD , cujus cen-
trum est punctum O , & concipiatur ipse se-
micirculus AEB perventus ad eâ positionem,
ut contingat in F arcum BD , punctumque
describens A incidat super puncto N . Et
quoniam, junctâ rectâ OF , hæc transit per
centrum semicirculi C , fit hinc, ut descri-
pto ex puncto O velut centro arcu EN , sint
similia, & æqualia tam triangula OCN ,
 OCE , quàm triangula OFN , OBE : proinde-
que, quum æquales sint anguli BOE , FON ,
addito communi EOF , erunt etiam æquales
anguli BOF , EON : & propterea, quia similes
sunt sectores OBF , OEN , erit ut arcus BF
ad

ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE. Jam verò per ipsam curvæ genesim arcus circuli immobilis BF est æqualis arcui circuli mobilis FB, sive AE. Igitur erit etiam, ut arcus AE ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE, quæ est etiam proprietas principalis epicycloidis externæ.

Hinc epicyclois internâ eâdem planè ratione in plano per puncta describetur, ac epicyclois externa, nimirum si constituto ad centrum circuli mobilis C angulo quovis ACE, fiat ad centrum circuli immobilis O angulus alter EON, qui sit ad priorem ACE, ut est AC ad OB, & ex puncto O velut centro describatur arcus EN, qui secet rectam ON in puncto N. Unde etiam Epicyclois interna non semper erit ex numero curvarum mechanicarum, sed tunc tantum, quum ratio, quæ est inter radios AC, OB nullis numeris potest designari. Interim circa figuram alterius hujus epicycloidis nequaquam distinguendi sunt tres illi casus, quos ad determinandam figuram epicycloidis externæ superiùs distinximus. Nam, quum hæc alia epicyclois oriatur ex revolutione circuli intra circulum, profectò radius circuli mobilis minor semper esse debet radio circuli immobilis.

Id potiùs circa hanc alteram epicycloidem observandũ hæc venit, quod si diameter

cir,

circuli mobilis adæquet radium circuli immobilis, epicyclois ipsa evadat linea recta per centrum immobilis circuli transiens, & axi suo perpendiculariter insistens. Nam, quum ad inveniendum unumquodque epicycloidis punctum N fieri debeat ad centrum O angulus EON , qui sit ad angulum OCE constitutum ad centrum C , ut est radius OC ad radium OB ; proculdubio semper ac OC semissis erit ipsius OB , erit etiam angulus EON semissis anguli OCE : & propterea punctum N locabitur in rectâ OD ; quandoquidem angulus EOD , velut æqualis angulo EBO , semissis est anguli OCE .

FIG. 87.

Sed, ut alias utriusque epicycloidis proprietates prosequamur, consideremus adhuc semicirculum AEB ad talem positionem perventum esse, ut contingat in F circumferentiam circuli immobilis, punctumque describens A incidat super puncto N . Et quoniam portio indefinitè parva epicycloidis, quæ puncto N adjacet, considerari potest descripta à rectâ FN , revolutâ circa punctum F tamquam centrum, erit ipsa recta FN radius, aut etiam portio radii circuli, osculantis epicycloidem in puncto N : proindeque, quia radius cujusque circuli suam circumferentiam ad rectos angulos secabit, secabit eadem FN epicycloidem AND ad rectos angulos in puncto N . Unde
facili

facili negotio ducemus rectam lineam, quæ epicycloidem in dato puncto N perpendiculariter secet: nimirum si descripto ex puncto O tamquam centro arcu EN , constituatur angulus FON æqualis angulo BOE , aut etiam si inter epicycloidem, & basim aptemus rectam FN æqualem chordæ correspondenti BE . Ex quo etiam nullo negotio ducetur recta linea, quæ epicycloidem contingat in N : nimirum si fiat angulus ONR æqualis angulo OEA .

FIG. 88.
89.

Quod attinet ad rectificationem utriusque epicycloidis, determinabimus eam, inveniendò rationem, quam habet unaquæque portio AN ad correspondentem portionem $A\pi$ cycloidis vulgaris, descriptæ per revolutionem ejusdem semicirculi AEB super recta Bd . Quem in finem hoc theorema demonstrandum nobis proponimus, quod quælibet portio epicycloidis AN sit ad cycloidis correspondentem portionem $A\pi$, ut est OC ad OB . Id autem ostendemus hac ratione. Constituatur angulus NRT æqualis angulo πrs , ipsique RT perpendicularis demittatur NT : quibus peractis orietur triangulum RNT simile triangulo πrs , & simile etiam triangulo AEM ; eritque adeò angulus TRN æqualis angulo BAE , sive EBd , & angulus TNR æqualis angulo AEM .

Hinc quia, propter tangentem epicycloidis

dis, angulus ONR æqualis est angulo OEA ,
 erit etiam angulus ONT æqualis angulo
 OEM , & consequenter angulus TNS æqua-
 lis angulo BOE . Sed, quum circulus super
 rectâ NR descriptus transeat etiam per pun-
 cta S , & T , angulus TNS æqualis est angulo
 TRS , & anguli TNR , TSR vel sunt æqua-
 les inter se, vel simul duos rectos adæquant.
 Igitur erit quoq; angulus TRS æqualis an-
 gulo BOE , & angulus TSR æqualis angulo
 EOB : proptereaque, quum similia sint trian-
 gula SRT , BOE , erit ut TR ad RS , ita EO ad
 BO . Jam verò, ut mox ostendemus, RS est
 ad PM , sive rs , ut est OC ad OE . Quare erit
 ex æquali perturbando, ut TR ad rs , ita
 OC ad OB ; atque adeò quia TR est ad rs , ut
 NR ad nr , erit ex æquali, ut NR ad nr ,
 ita OC ad OB ; & consequenter, quum
 id ubique reperiat, erit OC ad OB , ita
 portio epicycloidis AN ad correspon-
 dentem cycloidis portionem An , sive etiam ad
 duplum chordæ AE .

Quod autem RS , sive QH sit ad PM , sive
 rs , ut est OC ad OE , ostendemus in hunc
 modum. Quoniam enim rectus est tam
 angulus OEI , quam angulus CEQ , ad-
 dito vel dempto communi CEI , erit angulus
 OEC æqualis angulo QEI : proindeque,
 quia angulus PQE æqualis est angulo BCE ,
 erit ut sinus anguli OEC ad sinum anguli
 BCE ,

BCE, ita sinus anguli QEI ad sinum anguli PQE. Jam verò sinus anguli OEC est ad sinum anguli BCE, sive OCE, ut est OC ad OE; & assumptâ EQ pro radio, sive sinu toto, sinus anguli QEI, sive QEH est ad sinum anguli PQE, ut QH ad PM. Quare erit ex æquali ut QH, sive RS ad PM, ita OC ad OE.

Quod attinet ad quadraturam spatii epicycloidalis, determinabimus quoque illam, inveniendò rationem, quam habet unumquodque spatium epicycloidale AEN ad correspondens spatium cycloidale AEn. Quem in finem hoc aliud theorema demonstrandum nobis proponimus: nimirum spatium epicycloidale AEN esse ad spatium cycloidale correspondens AEn, ut est OC ad OB. Id autem ostendemus in hunc modum: quoniam spatiolum epicycloidale EQRN non differt sensibiliter à rectangulo, quod fit ex EN in RS, itemque spatiolum cycloidale EQrn sensibiliter non differt à rectangulo, quod fit ex En in rs, sive PM; spatiolum primum erit ad spatiolum secundum in ratione compositâ ex EN ad En, & ex RS ad PM. Jam verò, propter cycloidis proprietatem, recta En æqualis est arcui AE, & ob naturam epicycloidis arcus EN est ad arcum AE, ut est OE ad OB. Igitur, quum ex mox ostensis RS sit ad PM, ut est OC ad OE, idem

dem spatiolum epicycloidale $EQRN$ erit ad spatiolum cycloidale correspondens $EQrn$ in ratione compositâ ex OC ad OE , & ex OE ad OB , atque adeò in simplici illâ ratione, quam habet OC ad OB . Unde, quum hæc ultima ratio sit constans, eaque ubique reperiatur, spatium epicycloidale AEN erit ad correspondens spatium cycloidale AEn similiter, ut OC ad OB .

Hinc quoque, quum integrum spatium epicycloidale $AEBD$ sit ad integrum spatium cycloidale $AEBd$, ut est OC ad OB ; erit in hac eâdem ratione idem spatium epicycloidale $AEBD$ ad duplum semicirculi AEB . Unde jam, quia spatium epicycloidale $AEBD$ est ad semicirculum AEB , ut est $2OC$ ad OB ; erit quoque componendo, ut totum spatiû epicycloidale $ACBD$ ad semicirculum AEB , ita $2OC + OB$ ad OB . Qui etiam, quia descripto ex puncto O velut cetro arcu AV , spatium interceptû $ABDV$ est ad sectorem OBD , ut est quadruplum rectanguli ACO ad OB quadratum; & aliunde, propter arcus æquales BFD, AEB , sector OBD est ad semicirculum AEB , ut est OB quadratum ad rectangulum CBO ; erit ex æquali ordinando, ut spatium $ABDV$ ad semicirculum AEB , ita quadruplum rectanguli ACO ad rectangulum CBO , sive $4OC$ ad OB : proindeque, quia ordinando rursus cum supe-

reriori analogiâ spatium $ABDV$ est ad totum spatium epicycloidale internum $ACBD$, ut est $4OC$ ad $2OC + OB$; erit dividendo, ut spatium epicycloidale externum ADV ad spatium epicycloidale internum $ACBD$, ita $2OC - OB$ ad $2OC + OB$, & consequenter idem spatium epicycloidale externum ADV ad semicirculum AEB , erit, ut $2OC - OB$ ad ipsam OB .

Sed illud etiam à Geometris circa spatia epicycloidalia ostensum est: scilicet, quod si recta FN secet epicycloidem ad rectos angulos in puncto N , portio spatii epicycloidalis interni $ABFN$ sit ad portionem correspondentem spatii circularis ABE , ut est $2OC + OB$ ad OB . Hoc autem facile demonstrabimus, si consideremus, eandem semper manere rationem inter spatia epicycloidalia $ABFN, FDN$, cujuscumq; magnitudinis assumatur radius circuli immobilis OB . Hinc enim fiet, ut si radius iste evadat infinitus, & consequenter epicyclois AD abeat in cycloidem vulgarem Ad , ratio spatiorum $ABfn, fdn$ eadem maneat, ac prius; sitque adeò ut spatium $ABFN$ ad spatium FDN , ita spatium $ABfn$ ad spatium fdn . Ostensum est autem, spatium $ABfn$ ad spatiū fdn eandem habere rationem, quam spatium circulare ABE ad chordam BE terminatum ad reliquum segmentum BEB . Igitur erit ex æquali, ut spatium

tium circulare ABE ad segmentum reli-
quum BEB, ita spatium ABFN ad spatium
FDN, atque adeò componendo, & permu-
tando erit, ut semicirculus ABE ad spatium
totum ABD, hoc est, ut OB ad $2OC + OB$, ita
spatium circulare ABE ad chordam BE ter-
minatum ad spatium epicycloidale ABFN.

Ex quibus liquet, quadraturam spatio-
rum epicycloidalium ex circuli quadraturâ
pendere, & nonnisi eâ præsuppositâ posse
exhiberi. Sed nihilominus, perinde ac ac-
cidit in cycloide vulgari, dantur nonnulla
spatia epicycloidalia, quæ quadrari possunt
absque eo, quod ad circuli quadraturam
recurrare sit opus. Nam primò si punctum
M incidat super centro C, erit spatium epi-
cycloidale AEN ad quadratum semidiamete-
tri AC, ut est OC ad OB. Nam in hoc casu
correspondens spatium cycloidale AEN o-
stensum est æquale quadrato semidiametri
AC. Est autem ex generali nostro theore-
mate, ut spatium AEN ad spatium AEN,
ita OC ad OB. Et igitur erit quoque, ut
spatium AEN ad quadratum semidiametri
AC, ita OC ad OB.

Secundò, si idem punctum M taliter ca-
piatur, ut erectâ perpendiculari ME, se-
cante circuli circumferentiam in E, sit OE
media proportionalis inter ipsas OA, OC,
spatium epicycloidale ABEN erit ad trian-

gulum CBE, ut est $2OC + OB$ ad OB . Ostensum est enim in hac ratione esse spatium epicycloidale ABFN ad correspondens spatium circulare ABE. Atqui in casu, de quo agimus, eandem quoque rationem habet spatium epicycloidale BENF rectis BE, FN terminatum ad sectorem ACE. Itaque in eadem etiam, dividendo, ratione erit reliquum spatium epicycloidale ABEN ad triangulum CBE.

Quod autem existente OE mediâ proportionali inter OA, OC, spatium BENF sit ad sectorem ACE, ut est $2OC + OB$ ad OB , ostenditur sic. Quoniam enim arcus AE æqualis est arcui BF, sector ACE erit ad sectorem BOF, ut est rectangulum CBO ad BO quadratum: proindeque, quia propter similitudinem arcuum BF, EN, sector BOF est ad spatium BENF, ut BO quadratum ad differentiam quadratorum OE, OB; erit ex æquali ordinando, ut sector ACE ad spatium BENF, ita rectangulum CBO ad differentiam quadratorum OE, OB. Jam verò OE quadratum est æquale rectangulo AOC, & differentia inter rectangulum AOC, & OB quadratum est rectangulum aliud, quod fit ex BC in $2OC + OB$. Igitur erit ut rectangulum CBO ad rectangulum ex BC in $2OC + OB$, hoc est, ut OB ad $2OC + OB$, ita sector ACE ad spatium BENF.

Sed

Sed notatu hîc dignum existimo, quod quemadmodum primum spatium epicycloïdale, quod absolutè quadrabile demonstra- vimus, correspondet spatio cycloïdali, cu- jus valorem independenter à quadraturâ circuli exhibuit Leibnitius; ita quoq; secun- dum spatium epicycloïdale, quod etiam absolutè quadrabile ostensum fuit, corre- spondeat spatio cycloïdali, cujus valorem independenter etiam à quadraturâ circuli detexit Hugenus. Quod facilè quidem sua- detur, si quemadmodum clarè liquet, pri- mum spatium epicycloïdale abire in spa- tium cycloïdale Leibnitianum, quum epi- cycloïsis in cycloïdem vertitur; ita quoque ostendi possit, secundum spatium epicycloï- dale mutari in spatium cycloïdale Hugenianum, quum epicycloïsis abit in cycloïdem vulgarem. Id autem per proprietates in- finiti facillimè præstabimus.

Nam, quum OE quadratū sit æquale duo- bus quadratis OM, EM, erit etiam iisdem quadratis æquale rectangulum AOC. Sed quum centrum O abit in infinitum, qua- dratum EM est indefinitè parvum respectu alterius OM, & consequenter negligi potest. Igitur, quum epicycloïsis abit in cycloïdem, erit rectangulum AOC æquale quadrato so- lius OM: proindeque erit, ut OC ad OM, ita OM ad OA. Jam verò dividendo habetur, ut

OC ad CM, ita OM ad MA. Igitur, quia lineæ OC, OM, utpote infinitæ, sunt æquales, erunt etiam æquales ipsæ CM, MA; atque aded punctum M bisecabit radium CA, qui est casus ab Hugenio consideratus.

C A P. VI.

De motu pendulorum isochrono in quacunque gravitatis hypotbesi.

V Idimus superiùs, quod ut pendula ad horologiorum usum aptari possint absque ullo sensibili errore, debeant eorum oscillationes, utcumque inæquales, esse isochronæ, hoc est eodem tempore fieri, ut scilicet ex numero oscillationum colligi possit tempus elapsum. Sed innuimus etiam, id nequaquam haberi posse, quum pendulorum oscillationes sunt per arcus circulares. Nam etsi hujusmodi oscillationes, ubi exiguæ sunt, ad sensum sint etiam æquiditurnæ; quia tamen non sunt omnimodè, ac geometricè tales, erit semper inter singulas oscillationes exiguum aliquod discrimen: unde demum necesse est, ut differentia satis magna oriatur.

Jam diximus quoque, Clarissimum Virum Christianum Hugenum primum omnium præmonstrasse, qua ratione fieri possit,

fit, ut penduli oscillationes sint isochronæ, nimirum si oscilletur pendulum in cycloidis circumferentiâ; quum ab eodemmet fuerit ostensum, tempora descensus per arcus cycloidis, cujus vertex est punctum imum, inter se æqualia esse. Igitur ut præclarum hoc theorema ante omnia ostendamus, oportet recordemur nonnullarum propositionum, quas superius demonstratas exhibuimus.

Nempe primò, quod vis, qua grave acceleratur in descensu per aliquam curvam lineam, eadem sit planè, ac si per tangentem ejus curvæ, aut etiam per aliam rectam lineam tangenti parallelam descenderet. Secundo, quod vis, qua grave descendit per planum utcumque ad horizontem inclinatum, sit ad vim absolutam gravitatis, qua agente verticaliter descenderet, ut est altitudo plani ad ejusdem longitudinem. Et tertio, quod si vires motrices sint in homologâ spaciorum describendorum ratione, spatia illa eodem tempore à corpore iis viribus agitato describantur.

His præmissis propositionibus, facili negotio ex ostensis cycloidis proprietatibus propositum theorema deducemus: nempe grave eodem tempore descendere ex puncto cycloidis N ad punctum infimum A, quo descendit ex quovis alio cycloidis puncto R

FIG. 90

ad idem punctum infimum A. Nam ductis ordinatis MN, PR, junctisque chordis AE, AQ, quia chordis hisce ostensæ sunt parallelæ tangentes in punctis N, & R; erunt per propositionem primam vires, quibus grave acceleratur in punctis illis, eadem, ac si descenderet per chordas AE, AQ.

Jam verò per propositionem secundam vires, quibus grave acceleratur in descensu per chordas AE, AQ, sunt ad vim gravitatis absolutam, ut sunt rectæ AM, AP ad ipsas AE, AQ, sive etiam, propter circuli naturam, ut sunt chordæ AE, AQ ad eandem diametrum AB. Et igitur erit ex æquali, ut vis, qua grave acceleratur in puncto N, ad vim, qua idem grave acceleratur in puncto R, ita chorda AE ad chordam AQ: proindeque, quia spatia iis viribus describenda AN, AR ostensa sunt dupla chordarum AE, AQ; erunt eadem vires acceleratrices in punctis N, & R, ut ipsa spatia describenda AN, AR; & consequenter per propositionem tertiam æqualia erunt tempora descensus per arcus cycloidis AN, AR.

Hanc cycloidis proprietatem, ut dictum est, detexit primus omnium Clarissimus Geometra Christianus Hugenius in suo Opere nunquam satis laudando de Horologio Oscillatorio. Sed & tempus idem Auctor defini-

nivit, quo grave corpus unūquemq; cycloidis arcum usque ad punctum infimum terminatum describeret; ostendendo nimirum, tempus descensus per semicycloidem DNA, & consequenter per quemlibet ejus arcum, esse ad tempus, quo idem grave descenderet per axem cycloidis AB, ut est circumferentia semicirculi genitoris AEB ad ipsum cycloidis axim AB.

Quod ut etiam hoc loco ostendamus, recordemur prius oportet trium aliarum propositionum, superius quoque à nobis ostensarum, nempe primò, quod si vires, quibus grave corpus continuò acceleratur, proportionales sint spatiis describendis, tempus descensus per aliquam longitudinem sit ad ad tempus, quo eadem longitudo velocitate finali æquabiliter percurri potest, ut est quadrantis circumferentia ad radium. Secundò, quod velocitas, quam acquirit grave in descensu per aliquam longitudinem nullis angulis interruptam, æqualis sit ei, quæ acquiritur descendendo verticaliter ex eadem altitudine. Et tertio, quod si grave per longitudinem aliquam descendat, & æquali tempore velocitate ultimò acquisitâ moveatur, duplum illius longitudinis percurrat.

His namque præmissis propositionibus, ostendemus nullo negotio, quod tempus de-
scen-

scensus per semicycloidem DNA, aut etiam per quemlibet ejus arcum NA sit ad tempus, quo idem grave descenderet per cycloidis axim AB, ut est circumferentia semicirculi genitoris AEB ad ipsum axim AB. Nam, quum vires, quibus grave acceleratur in descensu per cycloidem, ostensæ sint proportionales arcubus ad punctum infimum A terminatis; tempus descensus per semicycloidem DNA, per propositionem primam, erit ad tempus, quo eadem longitudo percurri potest æquabiliter velocitate finali, ut est quadrantis circumferentia ad semidiametrum, sive etiam ut est circumferentia semicirculi AEB ad axim AB.

Jam verò, per propositionem secundam, velocitas ultimò acquisita in descensu per semicycloidem DNA est æqualis velocitati, quæ ultimò acquiritur in descensu per altitudinem AB, & ex superiùs ostensis semicyclois DNA est æqualis duplo sui axis AB. Igitur tempus descensus per semicycloidem DNA est ad tempus, quo percurritur duplum axis AB velocitate ultimò acquisitâ in descensu per ipsum axim AB, ut est circumferentia semicirculi AEB ad eundem axim AB. Est autem per propositionem tertiam tempus, quo percurritur duplum axis AB velocitate ultimò acquisitâ in descensu per ipsum axim AB, æquale tempori descensus

sus

sus prædicti . Quare erit tempus descensus per semycicloidem DNA ad tempus descensus per cycloidis axim AB, ut est circumferentia semicirculi genitoris AEB ad ipsum cycloidis axim AB.

Exinde igitur, quod tempora descensus per quosvis arcus cycloidis usque ad punctum infimum A terminatos sint semper æqualia, ultrò liquet, quod si pendulum oscilletur in perimetro totius cycloidis DAD, cujus vertex sit semper punctum infimum A, illud sive in magnos excurrat arcus, sive etiam in minores, æqualibus semper temporibus singulas suas oscillationes perficiat. Unde jam, quia ut horologia oscillatoria sint omnibus suis numeris absoluta, necesse est, ut singulæ oscillationes sint isochronæ, hoc est æqualibus temporibus fiant; perspicuum est, ejusmodi horologiorum perfectionem facili negotio obtineri, si pendulum suas oscillationes in perimetro cycloidis absolveret.

Modum autem, quo fiet, ut pendulum non modò in cycloide, sed in quavis aliâ datâ curvâ lineâ oscilletur, primus omnium demonstravit idem Hugenius in laudato suo tractatu de Horologio Oscillatorio: nimirum inveniendò curvam aliam, per cujus evolutionem proposita describatur, & deinde duas laminas in eandem curvaturam inflectendo.

Ita

Ita, si DAD sit curva proposita, & AH axis
 ejus, inventis duabus aliis curvis DH , per
 quarum evolutionem partes propositæ cur-
 væ describantur, substituendæ sunt in lo-
 cum earum curvarum duæ laminæ eodem
 planè modo incurvatæ. Nam hoc pacto si
 penduli filum suspendatur ex puncto H , in
 quo prædictæ duæ laminæ conveniunt, sit-
 que ejus longitudo æqualis axi AH , & con-
 sequenter longitudini cujusque laminæ
 DH ; quia pendulum oscillando circa pun-
 ctum H efficit, ut filum ipsum parte sui su-
 periore continuò applicetur ad laminam,
 versus quam peragitur motus, & circa eam
 ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ,
 cui lamina non dum subjicitur, in lineam
 rectam protendatur: fiet hinc, ut per conti-
 nuam istam fili ad laminas illas applicatio-
 nem impediatur motus penduli in circum-
 ferentiâ circuli, atque adeò absolvatur in
 perimetro propositæ curvæ DAD , cujus par-
 tium evolutas laminæ illæ repræsentant.

Quocirca, ut pendulum in datâ cycloide
 oscilletur, invenienda est curva linea, per
 cujus evolutionem cyclois ipsa describatur.
 Eam autem facile quidem determinabimus,
 si recordemur, puncta evolutæ inveniri,
 quærendo punctum concursus duarum li-
 nearum, quæ ad rectos angulos in duobus
 punctis indefinitè proximis secant curvam,
 cujus

cujus quæritur evoluta. Hinc enim fiet, ut si AND sit semicyclois descripta ex revolutione semicirculi AEB super rectâ positione datâ BD , & sumptis in ejus perimetro duobus punctis N , & R indefinitè proximis, ducantur ad puncta illa duæ perpendiculares FN , GR , quæ protractæ conveniant in puncto K ; punctum istud K sit in quæsita semicycloidis evolutâ DH .

FIG. 91.

Hoc autem punctum facile determinabimus, si ductis ordinatis MN , PR , junctisque chordis BE , BQ , consideremus, quod propter perpendiculares FN , GR parallelas chordis BE , BQ , angulus NKR æqualis sit angulo EBQ , & consequenter ipsum triangulum NKR æquiangulum triangulo EBQ . Etenim, quum portio cycloidis NR ostensa sit dupla rectæ EX , quæ est differentia chordarum AE , AQ , erit quoque recta NK dupla chordæ correspondentis BE ; & propterea invenietur punctum K , si statuatur NK dupla chordæ BE . Quumque eadem sit demonstratio de quovis alio puncto cycloidis, palam est unumquemque radium suæ evolutæ duplum esse chordæ correspondentis, atque adeò recta AH dupla quoque erit diametri AB .

Hinc facile erit, naturam ipsius evolutæ DKH speciatim definire. Etenim, si compleatur rectangulum $DBHL$, semicirculus

DIE

DIL, descriptus super rectâ DL tamquam diametro, æqualis erit semicirculo genitori AEB: proindeque, si ducatur chorda DI parallela radio evolutæ NK, quia ea est etiam parallela chordæ BE, erit angulus IDL æqualis angulo ABE, atque adeò æquales erunt inter se tam arcus IL, AE, quàm arcus DI, BE. Unde jam, quum æquales sint etiam chordæ DI, BE, & BE sit æqualis FN, sive FK; erit quoque DI ipsi FK æqualis, & consequenter æquales etiam rectæ DF, IK. Est autem, per naturam cycloidis, DF æqualis arcui BE, sive DI. Igitur erit quoque recta IK æqualis arcui DI; & propterea evoluta cycloidis DKH erit cyclois altera priori æqualis, sed inverso modo posita, quemadmodum ipse Hugenius, & plerique alii multifariam demonstrarunt.

FIG. 90. Quocirca in priori schemate, si laminæ DH repræsentet duas semicycloides inverso modo positas, ita nempe, ut vertices ipsarum sint puncta D, sintque axes earundem æquales dimidio longitudinis penduli AH; curva DAD, in cujus perimetro pendulum oscillabitur, fiet cyclois integra, ejusque axis erit similiter æqualis dimidio longitudinis penduli AH. Cæterum laminas in cycloidis formam incurvare, facile quidem erit; quandoquidem, ut vidimus capite antecedenti, cyclois facili negotio tam motu con-

continuo, quàm in plano per puncta describi potest.

Quod de cycloide ostensum fuit ab Hugenio, demonstravit etiam Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis de epicycloide internâ: nempe, quod vertice deorsum spectante æqualia sint tempora descensus per quosvis ejus arcus ad verticem, sive punctum infimum terminatos; verùm in hypothese, quod grave descendens viribus urgeatur, quæ undique tendentes ad centrum circuli immobilis, proportionales sint distantis ab eodem centro. Quin etiam si fieri possit, ut vis gravitatis sursum tendat ad datum punctum eâdem lege, obtinebit idem in epicycloide externâ, quæ per circuli supra circulum revolutionem describitur.

Sit enim utriusque epicycloidis DNA vertex punctum infimum A, & per ejus perimetrum descendat grave aliquod viribus tendentibus ad centrum circuli immobilis O, & proportionalibus distantis ab eodem centro. Ducatur ad punctum N, in quo corpus versari suppono, tangens TR, ad quam agantur perpendiculares FN, OT; jamque vis corporis descendens ON, per notissimam virium resolutionem, resolvetur in duas alias vires, rectis OT, TN designatas. Et quoniam prior harum virium OT directè cor-

FIG. 92.

93.

corpus à centro O impellendo, nihil confert ad corporis descensum, omnisq; acceleratio profuit ex vi alterâ TN, quippe quæ urgendo corpus versus R, directè accelerat descensum ejus in curvâ; fiet hinc, ut acceleratio corporis huic vi acceleratrici proportionalis sit singulis momentis, ut longitudo TN.

Jam verò, junctâ rectâ OF, quæ secet tangentem TN in puncto R, habetur ut TN ad NR, ita OF ad FR. Igitur, quia propter æqualitatem, tam linearum FN, BE, quàm angulorum NFR, EBA, æquales sunt etiam tam lineæ FR, BA, quàm lineæ NR, AE; erit quoque ut TN ad AE, ita OF, sive OB ad BA; & consequenter quum hæc secunda ratio ubique sit constans, acceleratio corporis in loco N erit, ut chorda AE, sive etiam ut arcus epicycloidis AN, quippe qui ad chordam AE ex ostensis constantem quoque habet rationem. Unde, quum eadem sit demonstratio de quovis alio epicycloidis puncto; consequens est, ut accelerationes corporis in duobus quibuscvis punctis epicycloidis sint, ut arcus describendi, & propterea per propositionem illam superiùs memoratam æqualibus temporibus per arcus illos grave corpus descendet.

Hinc, si vires acceleratrices penduli oscilantis per perimetrum epicycloidis DAT tendant ubique ad centrum circuli immo

bilis O , sintque etiam ubique proportionales distantis ab eodem centro, æqualia erunt tempora, quibus oscillationes utcumque inæquales absolvuntur. Etenim, quum ascensus corporis de loco infimo A per eosdē arcus epicycloides motu retrogrado fiat, aut etiam per alios æquales, in aliā epicycloidis parte sumptos; retardabitur pendulum ascendendo in locis singulis à viribus iisdem, à quibus descendendo accelerabatur. Unde, quum æquales sint velocitates ascensuum, & descensuum per eosdem, aut æquales arcus factorum; fiet hinc, ut quemadmodum in descensu inæquales arcus æqualibus temporibus describuntur, ita quoque æqualia sint tempora, quibus arcus utcumque inæquales in ascensu percurreuntur.

Oscillabitur autem pendulum in epicycloide DAD , si filum suspendatur ex tali puncto H , ut rectæ OA , OB , OH sint continuè proportionales, & laminæ DH ita quidem inflectantur, ut repræsentent duas alias semiepicycloides ejusdem speciei cum illâ, in qua pendulum debet oscillari, ita ut in iis OH sit semidiameter circuli immobilis, & BH diameter circuli mobilis. Has etenim esse curvas, ex quarum evolutione propositæ epicycloidis partes, hinc inde ab axi existentes, describuntur, facile demonstrabimus, si rursus recordemur, puncta evolutæ alicujus

FIG. 94.

95.

curvæ esse concursus duarum rectarum, quæ curvam ipsam in duobus punctis indefinite proximis ad rectos angulos secant.

Sint enim FN , GR duæ rectæ lineæ, quæ occurrant epicycloidi AND in duobus punctis indefinite proximis N , & R ad rectos angulos, æque conveniant in ipsius evolutæ puncto aliquo K . Describantur ex puncto O , velut centro, arcus concentrici EN , QR , & jungantur chordæ AE , AQ , BE , BQ , quemadmodum etiam ex puncto K tamquam centro describatur arcus indefinite parvus FS . Et quoniam per genesim epicycloidis arcus AQ , AE æquales sunt arcubus BG , BF ; erit quoque differentia illorum QE æqualis differentiæ istorum FG . Pariterque, quia perpendiculares FN , GR sunt æquales chordis BE , BQ ; erit etiam differentia illarum GS æqualis differentiæ istarum QX .

Hinc, quum triangula rectangula FSG , QXE habeant duo latera FG , GS æqualia duobus lateribus QE , QX , habebunt etiam tertium latus FS æquale tertio lateri EX ; & proinde, quum propter similitudinem sectorum KNR , KFS , KN sit ad KF , ut NR ad FS ; erit quoque, ut KN ad KF , ita NR ad EX . Jam verò, quia portiones epicycloidis AN , AR sunt ad chordas AE , AQ , ut est OC ad OB , erit etiam in hac eadem ratione

ne

ne differentia illarum portionum NR ad differentiam chordarum EX. Igitur erit ex æquali, ut KN ad KF, ita 2OC ad OB: & proinde punctum evolutæ K invenietur, si fiat, ut OA ad OB, ita FN ad FK. Quumque eadem sit demonstratio de quovis alio puncto evolutæ, invenietur similiter punctum H, si fiat ut OA ad OB, ita AB ad BH, hoc est, si rectæ OA, OB, OH continuè proportionales capiantur.

Atque hinc facilè etiam ipsius evolutæ DKH natura determinabitur. Etenim, si centro O, intervallo OH describatur inter rectas OB, OD arcus HI, & super portione DI, tamquam diametro, semicirculus constitutatur DLI; invenietur, eam esse aliam epicycloidem, descriptam ex revolutione semicirculi DLI super concavitate, aut convexitate arcus IH. Nam ductâ ad punctum F rectâ OF, quæ tangenti TN occurrat in R, quia NF est ad FK, ut AB ad BH, sive etiam ut RF ad FG; erit triangulum NFR simile triangulo KFG, & consequenter si in semicirculo DLI inscribatur recta DL æqualis ipsi FK, jungaturque IL, æqualia erunt, & similia, tam triangula DLI, FKG, quàm triangula IOL, GOK. Unde, quum æquales sint rectæ OL, OK; arcus, qui centro O, & intervallo OL describitur, transibit per punctum K. Quumque æquales sint

FIG. 92.
93.

etiam anguli IOI , GOK ; erunt similes sectoribus IOG , LOK ; & propterea erit, ut OI ad OL , ita arcus IG ad arcum LK .

Jam verò, propter similitudinem sectorum DOF , IOG , arcus DF est ad arcum IG , ut OB ad OH ; itemque propter æqualitatem angulorum DIL , EAB , arcus BE est ad arcum DL , ut est AB ad BH , five etiam, ut OB ad OH . Igitur erit ex æquali, ut arcus DF ad arcum IG , ita arcus BE ad arcum DL : ac proinde, quia, propter epicyclidem AND , arcus DF æqualis est arcui BE , erit etiam arcus IG æqualis arcui DL . Quare, quum ostensum sit, OI esse ad OL , ut est arcus IG ad arcum LK ; erit quoque, ut OI ad OL , ita arcus DL ad arcum LK ; & propterea punctum K erit ex superius ostensis in aliâ epicycloide descriptâ ex revolutione semicirculi DLI super arcu IH , quæ proinde similis erit priori AND ; quandoquidem diametri circulorum mobilium AB , BH eandem inter se habent rationem, ac radii circulorum immobilium OB , OH .

Itaque, ut pendulū in internâ epicycloide subinde possit oscillari, ut oscillationes omnes, utcumque inæquales, sint isochronæ, necesse est, ut viribus urgeatur, tendentibus ad centrum circuli immobilis, quod infra epicyloidem existit, & præterea proportionalibus distantis ab eodem centro. Unde,

de, si talis sit terræ constitutio, qualis demonstratur à Newtono in libro tertio admirandi sui operis, quod Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica inscripsit: nimirum, ut vis gravitatis tendat ad centrum terræ, & in progressu ab ejus superficie sursum quidem decrescat in ratione duplicatâ distantiarum à centro, deorsum verò in ratione simplici; liquet, pendula in fodinis, & terræ cavernis inferiùs suspensa in internâ quidem epicycloide oscillari debere, ut non modò oscillationes omnes evadant isochronæ, verùm etiam, ut per ipsam vim gravitatis oscillationes obsolvantur.

Cæterùm, si in pendulorum oscillationibus sola temporum æqualitas desideretur, & parum referat, num vires pendulorum oscillantium dependeant à gravitate, aut ab aliâ quavis causâ; poterunt oscillationes illæ in qualibet aliâ curvâ lineâ peragi: enim verò semper inveniri poterunt vires, quibus pendula in datis curvis oscillari debeant, ut oscillationes utcumque inæquales æqualibus temporibus absolvant. Oscilletur namque pendulum HA in quavis datâ curvâ DAD ope laminarum DH,

FIG. 96.

nes evadant isochronæ.

Sint AK curvæ lineæ, quæ ex evolutione partium propositæ curvæ describuntur, sitque NT radius evolutæ, correspondens puncto N , in quo pendulum versari suppono. Et siquidem vires omnes penduli oscillantis convergant ad centrum O , per quod transit axis datæ curvæ AH , erectâ ex puncto T perpendiculari TR , quæ occurrat rectæ NO in puncto R , designabit portio NR vim penduli oscillantis in loco N , ad hoc ut oscillationes omnes, utcumque inæquales, evadant isochronæ.

Nam hæc vis resolvitur in duas alias vires, per rectas TN , TR designatas. Atqui harum posterior TR , utpote perpendicularis radio evolutæ TN , nihil confert ad penduli descensum, quum trahat illud secundum longitudinem sui fili, nec proinde mutationem aliquam in ejus motum inducat; omnisque acceleratio profuit ex vi alterâ TN , quippe quæ urgendo pendulum secundum suam directionem, directè accelerat descensum ejus in curvâ. Itaque acceleratio penduli, huic vi acceleratrici proportionalis, erit singulis momentis, ut radius evolutæ TN .

Est autem ob naturam evolutarum radius TN æqualis arcui describendo AN . Quare eadem acceleratio penduli in loco N erit, ut

ar-

arcus describendus AN. Quumque eadem sit demonstratio in quocumque alio loco pendulum reperiatur; consequens est, ut accelerationes penduli in duobus quibuscumque curvæ arcubus sint, ut ipsi arcus describendi; proptereaque per superius memoratam propositionem arcus illos æqualibus temporibus pendulum describet.

Jam verò, ut eximii hujus problematis exemplum aliquod proferamus, quod in horologiis oscillatoriiis usui nobis esse possit; supponamus curvam DAD esse portionem circuli circumferentiæ, cujus centrum sit ipsum punctum suspensionis H, ita ut duæ laminæ DH sint totidem plana rectilinea; centrumque virium O esse ipsum telluris centrum, ad quod dirigitur vis gravitatis, decrescens in progreßu à superficie telluris deorsum in ratione simplici distantiarum à centro ejus, prout demonstravit Newtonus.

Et quoniam recta ON exponit vim penduli, quam habet ex gravitate, & recta NR designat vim ejusdem penduli, quam habere debet, ut oscillationes omnes evadant isochronæ; vis gravitatis penduli erit ad vim ejusdem penduli pro isochronismo requisitam, ut est ON ad NR: proindeque, quia producta TR usque ad S, ON est ad NR, ut OH ad HS; erunt eadem vires pen-

duli ipsis OH , HS respectivè proportionales.

Et quoniam radius evolutæ TN contingit circuli circumferentiam in puncto N , HS est ad TN , sive AN , ut semidiameter circuli HN , sive AH ad perpendicularum MN . Igitur, quia recta HS est æqualis re-
ctangulo HAN ad perpendicularum MN ap-
plicato, erit quoque, ut vis gravitatis pen-
duli ad vim ejusdem penduli pro isochro-
nismo requisitam, ita OH ad lineam, quæ
oritur, applicando rectangulum HAN ad
perpendicularum MN .

Hinc si vis gravitatis constans, & unifor-
mis ponatur, quia constantis est etiam, &
determinatæ longitudinis recta OH ; erit vis
penduli pro isochronismo requisita, ut linea,
quæ oritur applicando rectangulum HAN
ad perpendicularum MN , hoc est, ut arcus
 AN directè, & sinus ejus MN inversè. Quo-
circa in horologiis oscillatoriis si vires, à
machinâ impressæ in pendulum ad motum
conservandum, ita cum uniformi vi gravi-
tatis componi possint, ut vis tota deorsum
sit continuè, ut arcus describendus directè,
& sinus ejus inversè, oscillationes omnes,
utcumque inæquales, erunt isochronæ.

Sed quemadmodum datâ curvâ, in qua
pendulum debet oscillari, semper invenire
licet vim, quæ requiritur ad hoc, ut oscilla-
tiones omnes sint isochronæ; ita vicissim da-

câ lege virium, inveniri semper poterit curva talis, ut in eâ pendulum oscillando æqualibus temporibus inæquales arcus describat.

Sit itaque O punctum, ad quod vires diriguntur, & circa axim AO describatur scala virium $ABCO$, hoc est figura talis, quæ ordinatis suis PM , QN designet vires, quibus grave corpus urgetur in distantis OP , OQ ; & invenienda sit curva isochrona, hoc est illa, in qua pendulum iis viribus agitatum oscillationes inæquales æqualibus temporibus perficiat. FIG. 97.

Terminetur pendulum ad punctum Q , & circa eundem axim AO describatur primò curva QHI talis naturæ, ut ordinatæ ejus AI , PH sint in subduplicatâ ratione arcuum $AQNB$, $PQNM$; tum curva altera QRS , cujus ea sit natura, ut portiones QR , QS abscissæ per arcus concentricos PR , AS , ex puncto O tamquam centro descriptos, datam servent rationem cum ordinatis correspondentibus curvæ prioris PH , AI . Dico secundam hanc curvam eam esse, quam quærimus.

Capiatur enim in axi AO portio Pp indefinite parva, & ex eodem puncto O velut centro describatur arcus alter pr . Itaque, quia à centro virium O tantundem distant puncta S , & R , quantum puncta A , & P , ac-

qui-

quiret grave corpus in descensu per arcum SR tantam velocitatem, quantam sibi comparasset, si utique descendisset per AP; & propterea quadratum ejus velocitatis erit, ut area correspondens APMB.

Describatur porro centro A, intervalloque AI quadrans circuli IKF, & ex punctis H, & *h* agantur rectæ HK, *hk* axi AO parallelæ, quæ conveniant cum descripti quadrantis circumferentiâ in punctis K, & *k*. Itaque, quia area AQNB est, ut AI, sive AK quadratum, & area PQNM est, ut PH, sive AL quadratum; erit dividendo area APMB, ut KL quadratum: proindeque velocitas acquisita in descensu per arcum SR proportionalis erit rectæ KL.

Præterea, quia arcus QR datam servat rationem cum PH, servabit Rr eandem datam rationem cum EH, sive GK: & propterea, quia tempus per Rr est, ut Rr directè, & velocitas, qua describitur, inversè; erit idem tempus per Rr, ut GK directè, & KL inversè; adeoque erit, ut exponens rationis quam habet GK ad KL. Sed GK est ad KL, ut K*k* ad AK. Quare idem tempus per Rr erit, ut exponens rationis, quam habet K*k* ad AK; atque adeo, quum eadem sit demonstratio in singulis curvæ punctis, fiet tempus per totam curvæ longitudinem SRQ, ut exponens rationis, quam habet quadrans IKF

IKF ad radium AK, five AI.

Descendat jam grave pendulum non quidem ex puncto S, sed ex alio quovis puncto R; et pari ratiocinio ostendetur, tempus per arcum RQ proportionale esse exponenti rationis, quam habet circumferentia quadrantis descripti radio PH, five AL ad ipsum radium AL. Unde, quia ratio ista æqualis est rationi, quam habet quadrans IKF ad radium AI; erit tempus per totam curvæ longitudinem SRQ æquale tempori per arcum RQ; & propterea ipsa curva SRQ erit isochrona.

Quæ autem debeat esse data illa ratio, quam portiones inventæ curvæ isochronæ QR, QS servare debeant cum ordinatis correspondentibus PH, AI alterius curvæ, haud difficile erit definire. Sic enim DQ longitudo penduli oscillantis, atque adeò radius circuli, osculantis isochronam in puncto infimo Q, sintque quadrata ordinatarum PH, AI dupla arearum correspondentium PQNM, AQNB. Dico rationem illam subduplicatam esse ejus, quam habet rectangulum DQO ad rectangulum ex DO in QN.

Capiatur enim prope punctum Q portio indefinite parva QX, & ex puncto Q tamquam centro descripto arculo XY, agatur per punctum Y ordinata YZW. Ostendendum est igitur QX quadratum esse ad YZ
qua-

quadratum, five etiam ad duplum areæ $NQYW$, quæ sensibilibiter non differt à rectangulo NQY , ut est rectangulum DQO ad rectangulum ex DO in QN .

Est enim QY summa ex sinubus versis arcuum QX , XY , qui tamquam æquales considerari possunt. Quare erit QY æqualis duabus lineis, quarum altera oritur, applicando QX quadratum ad duplum ipsius DQ , altera applicando idem QX quadratum ad duplum ipsius QO . Unde, quum fiat solidum ex QX quadrato in DO æquale duplo ejus, quod sub tribus DQ , QO , QY continetur, erit ut QX quadratum ad $2QY$, ita rectangulum DQO ad DO ; atque adeo ut QX quadratum ad duplum rectanguli NQY , ita rectangulum DQO ad rectangulum ex DO in QN .

C A P. VII.

De motu pendulorum compositorum, five de centro oscillationis.

E Gimus huc usque de motu pendulorum simplicium, quæ sui extremitate unicum pondus gerunt; agendum est modo de motu pendulorum compositorum, quæ pluribus ponderibus, immutabiles distantias servantibus, instructa sunt: qua in re explican-

candæ sunt prius nonnullæ voces, quibus in posterum utemur, ad imitationem aliorum, qui hanc materiam expendentes illiusmodi voces usurparunt.

Et primò quidem, quemadmodum in pendulo tum simplici, cum composito, vocatur punctum suspensionis illud, circa quod totum pendulum reciproco motu eundo, & redeundo oscillatur; ita vocatur axis penduli compositi recta illa linea, quæ ex puncto suspensionis transit per commune centrum gravitatis ponderum omnium, quibus compositum pendulum instruitur; & axis oscillationis linea illa, quæ transiens per punctum suspensionis, perpendicularis est ad ipsum penduli axem.

Præterea pendulum simplex dicitur isochronum alteri pendulo composito, quum æqualibus temporibus oscillationes per arcus similes peragunt; sive etiam, quum demissa ex situ horizontali, vel quolibet alio similiter ad horizontem inclinato æquales constanter angulos simul oscillando faciunt. Et denique in pendulo composito vocatur centrum oscillationis, punctum in axe penduli, cujus distantia ab axe oscillationis æquatur longitudini penduli simplicis, composito isochroni.

Hac ratione, si ABC sit pendulum compositum, ita ut consideratis lineis AB, BC, CA

FIG. 98.

CA velut gravitatis expertibus, gerat in punctis B, & C duo quævis pondera, dum convertitur circa punctum suspensionis A; dicetur axis penduli recta AD, quæ ex puncto suspensionis A ducitur ad punctum D, commune centrum gravitatis ponderum B, & C; itemque dicetur axis oscillationis recta EE, quæ per punctum A ipsi AD perpendiculariter ducitur.

Porro si fuerit AF pendulum aliud simplex, quod demissum ex situ horizontali devenit ad situm, in quo reperitur eodem omnino tempore, quo axis penduli compositi ex eodem situ horizontali pervenit ad eundem, quem cum pendulo simplici retinet situm; dicetur simplex hoc pendulum isochronum pendulo composito. Et siquidem longitudo hujusmodi penduli simplicis transferatur super axe penduli compositi AD ex A in F; dicetur punctum F centrum oscillationis. Nec sanè alio redit universa, quam ostendendam aggredimur, de motu pendulorum compositorum doctrina, quàm ut determinetur in pendulis compositis centrum istud oscillationis.

Hujusmodi problema de inveniando centro oscillationis celebre fuit inter Geometras usque ab ætate Cartesii, illudque Christiano Hugenio, ferè adhuc puero, aliisque multis proposuit doctissimus Mersennus.

Sed

Sed à nemine id, quod desiderabat, tunc obtinuit. Non enim ab Hugenio, quippe qui, ut ipsemet fatetur parte quartâ sui horologii oscillatorii, quum nihil repererit, quo vel primas aditus ad contemplationem eam patefceret, velut à limine repulsus, à longiori investigatione tunc se abstinuit. Neque etiam ab aliis; nam etsi Viri insignes Cartesius, Honoratus Fabrus, aliique rem se confecisse crediderint, scopum tamen nequaquam attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, quorum neque etiam demonstrationem ullam idoneam attulerunt.

Quum Clarissimo Viro Christiano Hugenio ex pendulorum horologii sui temperandorum ratione ad idem problema denuò tentandum occasio oblata fuerit, melioribus auspiciis, atque à primâ origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavit. Postulavit autem, ut sibi hoc principium concederetur: commune centrum gravitatis quocumque ponderum, quæ vi gravitatis suæ junctim moventur, non posse altius ascendere, quàm ubi incipiente motu reperiebatur: idque tam si pondera illa junctim etiam ascendant, quàm si diffractò vinculo sursum velocitatem acquisitam unumquodque convertat.

Hoc principium, quominus scrupulum
mo-

moveret, nihil aliud sibi velle notavit, quàm quod nemo unquam vocavit in dubium, gravia nempe sursum non ferri. Nam primò si unum tantum sit corpus grave, illud vi gravitatis suæ altiùs ascendere non posse extra dubium est; ascendere autem tunc intelligitur, quum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per líneas inflexiles conjunctis concedi necesse est; quoniam nihil vetat ipsa tamquam unum aliquod considerari. Idemque verum etiam esse debet, si plura illa pondera non junctim ascendant, sed diffractò vinculo unumquodque sursum convertat motum suum; quandoquidem nulla videtur esse ratio, quæ possit contrarium efficere.

Ex hoc porrò principio sequentem elicit propositionem, quod si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum partem quamcumque oscillationis integræ confecerit, atque inde porrò intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, velocitates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; quod inquam commune centrum gravitatis eorum ponderum ad eandem præcisè altitudinem revertatur, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Non enim altiùs ascendere potest ob prin-
ci-

cipium, quod sibi concedi postulavit; sed neque etiam humilius. Nam, si pondera illa intelligentur ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere; eadem velocitates ipsis acquirerentur, quas habebant ante ascensum, & acquisierant motu penduli; adeoque, si rursus simul connectantur, & motum continuent, absolvet hoc modo restitutum pendulum oscillationis partem reliquam æquè ac, si absque ullâ interruptione motum continuasset.

Jam verò commune centrum gravitatis eorum ponderum in integrâ penduli oscillatione descendendo, & ascendendo æquales arcus describere debet. Itaque, completa oscillatione reperietur centrum illud in eadem altitudine, in qua reperiēbatur, priusquam pendulum dimitteretur; atque adeo paulò altiùs, quàm ubi ascenderat, quum sursum pondera diffractò vinculo velocitates acquisitas converterunt, & ex quo delapsa easdem velocitates sibi compararunt; quod equidem assumpto principio rursus refragatur.

Propositionem istam ex posito illo principio sic solidè deductam falsam esse putavit Dominus Abbas Catelanus, & consequenter corruere totum oscillationis systema Hugenianum, quod ut mox patebit huic innititur propositioni. Arbitratus est autem, fal-

FIG. 99. sitatem ejus ostendi posse, hac unicâ observatione, quod vis, quam vocamus gravitatē, longè aliter agat in pondera inter se juncta, quàm in pōdera à se invicem separata. Nam inquit, si pondera duo æqualia B, & A descendant separatim per arcus BG, AF, acquirant velocitates tales, ut harum quadrata sint, ut altitudines BI, AH, sive etiam ut distantie BD, AD. Sed, si eadem pondera virgâ inflexili jungatur, & pendulum compositum constituent; acquireretur quidem pendulo composito tantum velocitatis, quantum sibi comparabant pendula duo simplicia, sed velocitas distribuetur ponderibus B, & A pro ratione arcuum BG, AF, atque adeò pro ratione simplici distantiarum BD, AD, & non jam pro ratione subduplicatâ.

Ex quo patet, falsitatem propositionis Hugénianæ exinde collegisse Dominum Abbatem Catelanum, quia non perinde distribuitur ponderibus velocitas tota, quum moventur inter se juncta, quàm quum moventur à se mutuo separata. Priori etenim casu distribuitur pro ratione duarum magnitudinum simplici; in secundo verò casu pro ratione earundem magnitudinum subduplicatâ. Unde, si pendulum compositum ex ponderibus B, & A peragat partem oscillationis, exempli gratiâ, usque ad DFG, & oc-

& occurrat plano, ad quod frangatur, ut pondera à lineâ inflexili separentur, & tendat sursum eorum unumquodque cum velocitate acquisitâ ad maximam, quam potest, altitudinem, velut ad M, & L super planis inclinatis, si velimus, GM, FL, quæ tangant arcus BG, AF; altitudines MO, LN, ad quas duo pondera soluta ascendunt, diversæ erunt ab iis, unde descenderunt, BI, AH.

Et ut clariùs objectionis momentum intelligatur, pateatque qua ratione diffractione vinculo non possit per ea, quæ dicta sunt, ponderum commune centrum gravitatis, ad eandem præcisè altitudinem reverti; recordemur oportet ejus, quod superiùs ostensum est: nimirum altitudinem perpendicularem ad horizontem, unde descendit, vel ad quam ascendit commune centrum gravitatis multorum ponderum æqualium, æqualem esse summæ altitudinum, quarum respectu pondera ascendunt, vel descendunt, divisæ per numerum eorundem. Hinc itaque fit, ut si capiamus dimidium linearum BI, AH, & dimidium linearum MO, LN; ab unâ parte habeatur altitudo, unde commune centrum gravitatis descendit, ab alterâ altitudo, ad quam idem centrum ascendit; atque adeò, semper ac lineæ MO, LN diversæ sunt à lineis BI, AH, numquam ab utrâque parte eadem oriri poterit altitudo.

Huic objectioni in hunc modum responsum primò fuit ab Hugenio, quod etsi altitudines MO , LN diversam habeant rationem inter se, quàm altitudines BI , AH ; non hinc tamen colligi debeat, summas primarum, & secundarum differre à se mutuo. Neque enim semper verum est, quod datis duabus lineis, & præter has duabus aliis, quæ diversam, quam primæ, inter se rationem habeant, summæ primarum, & secundarum inter se sint inæquales. Concipe namque priores esse 5, & 10 pedum, & alteras pedum 3, & 12; jamque summa istarum, æquè ac illarum, erit pedum 15. Itaque tametsi lineæ MO , LN diversæ sint à lineis BI , AH , fieri tamen potest, ut summæ ex utrâque parte sint æquales; atque aded, ut æquales sint etiam semissæ summarum, quæ duas altitudines communis centri gravitatis ponderum æqualium A , & B nobis exhibent.

Verùm Dominus Abbas Catelanus neque etiam summas illarum linearum æquales esse posse demonstravit; eâ nempe ratione, quod velocitas totalis, quæ oritur, capiendò velocitates utriusque ponderis, est eadem, tam in pendulo composito, quàm in pendulis simplicibus; ex autem distribuatur ponderibus ipsis in ratione duarum magnitudinum simplici, quum simul

mul per pēdulum compositum descendunt, & in ratione earundem magnitudinum sub-duplicatā, quum diffractō vinculo seorsim ascendunt; altitudines verò, per quas eadem pondera ascendunt, vel descendunt, sive conjunctim, sive divisim, sint semper ut quadrata velocitatum.

Etenim, si $a + b$ referat totalem illam velocitatem, eāque divisā in duas partes a , & b , dividatur deinde in duas alias x , & y , quæ sint, ut quadrata ipsarum a , & b ; designabunt x^2 , y^2 altitudines, unde pondera B, & A pendulo alligata dimittuntur, & a^2 , b^2 altitudines, ad quas eadem pondera redeunt, postquam percussione fuerint separata. Non esse autem $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, nisi in casu, quo a , & b sunt æquales, facile quidem per calculum ostendi potest; quum x , & y prodeant duæ magnitudines: quæ habent communem denominatorem $a^2 + b^2$, numeratores verò diversos $a^3 + a^2b$, & $b^3 + ab^2$.

Hinc aliā ratione objectionem Domini Abbatis Catelani excepit Hugenius, nimirum quod falso huic inniteretur principio: velocitatem totalem penduli compositi, quæ in singula pondera distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsa describunt, æqualem esse summæ velocitatum, quas eadem pondera acquisivissent, si sejuncta sin-

gula separatim ex iisdem altitudinibus, & in eâdem distantia ab axe descendissent. Quod utique principium falsum esse demonstravit deinceps Dominus Jacobus Bernoullius in litteris Lipsiam missis anno 1686, continentibus narrationem controversiæ hujus inter Hugenum, & Abbatem Catelanum, afferendo causam physicam, omissam ab Hugenio, qua fit, ut penduli compositi velocitas perpetuò minor sit velocitate partium ejus separatarum.

FIG.
100.

Concepta est autem Domini Bernoullii demonstratio in hunc, qui sequitur, modum. Ponamus majoris evidentiae ergo, pondera penduli A, & B in lineâ inflexili DB liberè hinc inde moveri posse, sic ut lineæ hæc dum rotatur circa axem D, quàmvis secum rapiat pondera, non tamen impediat descensum illorum in lineâ rectâ versus terræ centrum. Quo posito constat, utrumlibet pondus, sigillatim dimissum, eâdem velocitate latum iri, qua ferretur absque virgâ DB, utpote nec à virgâ, nec ab ejus axe ullo modo impeditum: proindeque si pondus A absque virgâ certo tempore conficit spatium AH, & pondus B spatium æquale BN, utrumque etiam cum virgâ, sed sigillatim, dimissum eodem tempore idem spatium AH, vel BN conficiet.

Constat insuper, quod si gravitas in u-
trum-

trumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivè ab axe distantis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum, quandoquidem exacto certo tempore unum eorum reperiretur in H, & alterum in I, vel prius in L, posterius in N, sive absque virgâ, sive cum virgâ, sive sigillatim, sive conjunctim dimitterentur. Verumtamen, quia gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia AH, BN transigere annuntantur, & tamen dum pondus B jam est in N, alterum A junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit interea pertingere nisi ad L; hinc sequitur, gravitatis vim in pondere A non esse exhaustam, adeoque residuum harum virium ex unâ parte urgere debere corpus B, ex alterâ ipsum axem D, eundemque premendo, aliquam sui partem ibidem infumere, & deperdere; nam virgam in hoc casu instar vectis considerari posse extra dubium est. Non igitur vis gravitatis corporum A, & B agit tota in ipsa corpora, quum simul per inflexilem virgam dimituntur, sed portio transfertur in axem D: unde consequens fit, velocitatem penduli compositi perpetuò minorem esse velocitate partium ejus separatarum.

Præterea contra Dominum Abbatem Ca-

telanum illud etiam objecit Hugenus, quod quum ex ejus principiis commune centrum gravitatis revertatur altiùs, quàm unde descenderat, jam hinc detectum haberetur perpetuum mobile, doctis Viris existimatum impossibile. Et quamquam Dominus Bernoullius in laudatis suis litteris advertat in favorem Domini Catelani, id nequaquam sequuturum; quoniam in istis abstrahi solet ab aeris resistentiâ, à diminutione velocitatis, quæ necessariò sequitur disruptionem vinculi, quo connectabantur partes penduli, aliorumque obstaculorum. Nihilominus, ut ipsemet Hugenus alibi deinde observavit, considerare debuisset Vir Clarissimus, quod quum altitudo illa major, quam acquirit centrum gravitatis, sit semper determinatæ quantitatis, & effectus obstaculorum non sit determinatus, imò minui magis, magisq; possit; facile construi queat machina ejuscemodi, in qua commodum ex elevatione centri gravitatis derivatum præponderaret impedimento obstaculorum, atque ita motum perpetuum efficeret.

Sed videamus modò, qua ratione Hugenus ex eo, quod commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ad eandem præcisè altitudinem diffractio vinculo ascendere debeat, quam ante inceptam penduli oscillationem obtinebat, de-

ce-

terminaverit in pendulo composito centrum oscillationis, hoc est longitudinem penduli simplicis, composito isochroni. Rem igitur exposuit hoc theoremate: nimirum, quod si singula pondera, pendulum componentia, ducantur in quadrata suarum distantiarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id, quod fit, ducendo ponderum summam in distantiam communis centri gravitatis ab eodem axe oscillationis, oriatur longitudo penduli simplicis, composito isochroni, hoc est distantia inter axem, & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

Theorematis hujus demonstrationem negativam attulit Hugenus, sed nihil vetat, quominus eadem demonstratio positivè concipiatur. Itaque sint A, B, C pondera, pendulum componentia, quorum nec figura, nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur; eaque suspendantur ab axe, qui transiens per punctum D , rectus sit ad planum, quod conspicitur. Sit etiam in hoc eodem plano ponderum commune centrum gravitatis E ; ipsa namque pondera in diversis planis esse nihil refert. Tum in axe penduli DE referat punctum L centrum oscillationis, ita ut DL sit longitudo penduli simplicis, composito isochroni. Et designatis ipsis ponderibus litteris minusculis $a, b,$

c, re

FIG.
101.

c, referant eorum ab axe distantias *AD*, *BD*, *CD* litteræ *e*, *f*, *g*; & præterea vocetur *d* recta *DE*, quæ est distantia communis centri gravitatis ab eodem axe, & *x* recta *DL*, quæ est longitudo penduli simplicis, composito isochroni.

Jam id, quod fit, ducendo singula pondera in quadrata suarum distantiarum, est *aee* + *bff* + *cgg*, & id, quod fit, ducendo summam ponderum in distantiam communis centri gravitatis est *ad* + *bd* + *cd*. Unde eò res redit, ut ostendamus quotientem, qui oritur, dividendo productum primum per secundum, æqualem esse incognitæ *x*, vel, quod idem est, subsistere æquationem istam $adx + bdx + cdx = aee + bff + cgg$. Id autem ostendemus in hunc modum.

Quoniam enim punctum *L* est centrum oscillationis, perficiet illud suam oscillationem eodem tempore cum puncto *E*, in quo collecta concipitur gravitas ponderum omnium: proindeque dum punctum *L* descripto arcu *LP* pervenit ad *P*, punctum alterum *E* perveniet ad *Q* descripto arcu *EQ*, simili ipsi *LP*. Quocirca ductis à punctis *P*, & *Q* perpendicularibus sursum *PS*, *QR*, quæ occurrant subtenfis arcuum integrorum *LN*, *EI* in punctis *S*, & *R*, positâque $PS = y$; quia *DL* est ad *DE*, ut *PS* ad *QR*, invenietur altitudo, unde decidit commune centrum gravitatis,

QR

$$QR = \frac{dy}{x}.$$

Porro, quia pondera A, B, C communi vinculo continentur, fiet hinc, ut dum L transit ad P, pondera ipsa percurrant arcus AT, BV, CX similes ipsi LP, eorumque velocitates in punctis T, V, X sint ad velocitatem, quam habet L in P, ut sunt distantiae AD, BD, CD ad distantiam DL. Jam verò eadem velocitates sunt, ut radices altitudinum, quæ iis mediantibus percurri possunt. Igitur ex æquali altitudo, ad quam ascenditur velocitate puncti L, quum est in P, erit ad altitudines, ad quas ascenditur velocitatibus acquisitis à ponderibus A, B, C in punctis T, V, X, ut est quadratum distantiae DL ad quadrata distantiarum AD, BD, CD.

Hinc, quia punctum L eam habet velocitatem in P, qua valet ad eandem, unde decidit, altitudinem ascendere, nempe per arcum PN, vel etiam per perpendicularem

PS; proinde, inito calculo, erunt $\frac{ee}{xx}$, $\frac{ff}{xx}$, $\frac{gg}{xx}$

altitudines, ad quas ascenderent pondera A, B, C velocitatibus acquisitis in punctis T, V, X. Quocirca, si eadem altitudines multiplicentur per sua pondera, & summa

pro

productorum dividatur per summam ponderum, designabit quotiens inde ortus
 $aey + bfy + cgy$

———— altitudinem, ad quam
 $axx + bxx + cxx$
 ascendit commune centrum gravitatis eorum ponderum.

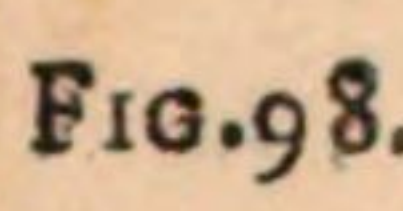
Ostensum est autem, altitudinem istam æqualem esse altitudini, unde descenderat.

Igitur, quia altitudo descensus est $\frac{dy}{x}$, erit
 $aey + bfy + cgy = \frac{axx + bxx + cxx}{x} \cdot dy$. Unde, divis

partibus æquationis hujus per y , iisdemque multiplicatis per $axx + bxx + cxx$, orietur loco ejus hæc altera æquatio $aee + bff + cgg = adx + bdx + cdx$, quæ est ipsissima illa, ad quam Hugonii theorema reduximus.

Quoniam autem hujusmodi demonstratio illi innititur fundamento, quod commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ad eandem præcisè altitudinem, diffracto vinculo, ascendere debeat, quam ante inceptam penduli oscillationem obtinebat; videamus num idem theorema possit absque illo principio aliter ostendi: quod equidem agentes, Hugoniam de centro oscillationis theoriā jam ab
 omni

omni scrupulo vindicabimus . Id præstitit primus omnium Jacobus Bernoullius in suo Schediasmate , inserto Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1703 . Tum methodis non multum diversis hoc idem perfecerunt Bernoullius frater in monumētis anni 1714 , Hermannus in suâ Phoronomiâ , & Volphius in suâ Mechanicâ . Sed horum omnium demonstrationes paulò perplexas , ac intricatas in hunc modum leniemus .

Sit pendulum ABC, compositum ex duobus ponderibus B, & C, quod moveatur circa axem EE rectum ad planum, quod conspici-

 FIG. 98.
 tur , ita ut AB, AC sint distantiae ponderum ab axe oscillationis , sitque AD axis ejus, & F centrum oscillationis . Dico pondera B, & C , multiplicata per quadrata suarum ab axe oscillationis distantiarum AB , AC tantum efficere, quantum summa eorundem ponderum multiplicata per rectangulū DAF.

Ducatur per punctum A linea horizontalis AK , ad quam demittantur perpendiculara BG , CH , DI , FK . Tum inteiligatur pendulum percurrere angulum indefinitè parvum, ita ut pondera B , C , F describant arcus BN , CN , FN similes inter se , & proportionales distantis AB , AC , AF . Itaque, nisi retinaculum obstaret , vis gravitatis eodem modo ageret in pondera B , & C,

C, ac in id, quod concipitur applicatum puncto **F**, sed propter obstaculum illud impulsus, quos pondera illa **B**, **C**, **F** excipiunt à gravitate, erunt inter se, ut arcus eodem tempore descripti **BN**, **CN**, **FN**.

Jam designatis per arcus istos **BN**, **CN**, **FN** inæqualibus impulsibus, quos pondera **B**, **C**, **F** simul per pendulum mota excipiunt à gravitate; designentur per exiguas rectas verticales, & æquales **BM**, **CM**, **FM** æquales impulsus, quos iisdem ponderibus imprimeret vis gravitatis, si seorsim absque ullo impedimento moverentur. Et quoniam pondera **B**, & **C** in revolvendis radiis **AB**, **AC** datum angulum continentibus tantundem possunt viribus **BM**, **CM**, ac si eos traherent viribus **BN**, **CM**; erit ob generale principium æquilibrii $B.BM.AG \div C.CM.AH = B.BN.AB \div C.CN.AC$. Atque ita quoque, quum pondus **F** perinde possit in revolvendo radio **AF** per vim **FM**, ac si eum traheret per vim alteram **FN**, erit $F.FM.AK = F.FN.AF$, hoc est $FM.AK = FN.AF$.

Atque hinc porro erit, ut $B.BM.AG \div C.CM.AH$ ad $FM.AK$, sive etiam propter æquales **BM**, **CM**, **FM**, ut $B.AG \div C.AH$ ad AK , ita $B.BN.AB \div C.CN.AC$ ad $FN.AF$. Sunt autem arcus **BN**, **CN**, **FN** proportionales distantis **AB**, **AC**, **AF**; itemque propter **D**, commune centrum gravitatis pon-

ponderum B, & C, est $B.AG + C.AH = B.AI + C.AI$. Quare erit etiam, ut $B.AI + C.AI$ ad AK , hoc est propter rectas AD , AF ipsis AI , AK proportionales, ut $B.AD + C.AD$ ad AF , ita $B.AB^2 + C.AC^2$ ad BF^2 . Unde eruitur $B.AB^2 + C.AC^2 = B.AD.AF + C.AD.AF$, hoc est summam productorum, quæ fiunt ex ponderibus B, & C in quadrata suarum distantiarum AB , AC , æqualem esse ei, quod fit multiplicando summam eorundem ponderum per rectangulum DAF .

Patet autem, eandem esse demonstrationem, si pondera pendulum componentia sint plura, quàm duo. Sed ex iisdem principiis facile quoque erit ostendere, commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ad eandem præcisè altitudinem, diffracto vinculo ascendere debere, quam ante inceptam penduli oscillationem obtinebat. Ascendant enim pondera B, & C velocitatibus acquisitis in descensu, inchoato à rectâ horizontali AK , ad puncta b , & c , & eorum commune centrum gravitatis D ascendat in d .

Itaque, quia velocitates ponderum B, C, F proportionales sunt distantiiis AB , AC , AF , & velocitas ponderis F tanta est, cum qua possit rursus ascendere per eandem altitudinem FK , unde descenderat; erunt altitudines Bb , Cc , FK , ut quadrata distantiarum AB ,

AB, AC, AF. Erat autem ut $B.AD \div C.AD$ ad AF, ita $B.AB^2 \div C.AC^2$ ad AF^2 . Quare erit quoque ut $B.AD \div C.AD$ ad AF, ita $B.Bb \div C.Cc$ ad FK, atque adeò permutando $B.AD \div C.AD$ erit ad $B.Bb \div C.Cc$, ut AF ad FK, five etiam, ut AD ad DI. Jam verò, propter D commune centrum gravitatis ponderum B, & C, est $B.Bb \div C.Cc = B.Dd \div C.Dd$. Itaque erit etiam, ut $B.AD \div C.AD$ ad $B.Dd \div C.Dd$, hoc est, ut AD ad Dd, ita AD ad DI. Est igitur Dd æqualis DI, & propterea ascensus communis centri gravitatis æqualis erit descensui.

Sed nolim hìc silentio præterire id, quod idem Hugenus observavit, nimirum quod si pondera, pendulum componentia, æqualia fuerint, tunc faciliùs inveniatnr centrum oscillationis, hoc est longitudo penduli simplicis, composito isochroni: scilicet, si summa quadratorum, factorum à distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, applicetur ad distantiam communis centri gravitatis ab eodem suspensionis puncto, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum. Quod equidem suffecerit adnotasse, quum nemo non sit, qui intellecto theoremate generali veritatem ejus non agnoscat.

C A P. VIII.

*De oscillatione planorum, & solidorum, ubi
etiam de identitate centri oscillationis
cum centro percussionis.*

QUæ de motu pendulorum simplicium
superiùs ostensa sunt, tunc tantùm
in praxi vera reperiuntur, quum filum, ex
quo pondus suspenditur, est valde tenue,
ipsumque pondus est globus exiguus, ex
materiâ perquàm gravi conflatus; quan-
doquidem in eorum demonstrationibus, &
filum gravitatis expers, & totius ponderis
gravitatem ad merum punctum redactam
supposuimus. Hinc, siquidem filum sit alicu-
jus sensibilis crassitie, & pondus valde ma-
gnum; ostensæ illæ leges de motu pendulo-
rum simplicium valde turbabuntur; quia
hac ratione pendulum non amplius ut sim-
plex, sed veluti compositum debet conside-
rari.

Multò minus eædem illæ leges veræ com-
perientur, si ad oscillationes peragendas fi-
gura aliqua, five plana, five solida ca-
piatur. Nam figura ista considerari debet
velut pendulum ex infinitis pondusculis
compositum; adeòque, ut legibus penduli
simplicis subjici possit, determinari debet

in eâ centrum oscillationis, hoc est longitudo penduli simplicis, quod illi sit isochronum. Jam autem, qua ratione in figuris tum planis, cum solidis determinari possit centrum oscillationis, colligitur ex theoremate generali, superiori capite à nobis ostenso.

Nimirum demonstravimus in capite antecedenti, distantiam centri oscillationis ab axe prodire, si singula pondera, pendulum componentia, multiplicentur per quadrata suarum ab axe distantiarum, & summa productorum dividatur, per id, quod oritur, multiplicando eorundem ponderum summam per distantiam communis centri gravitatis ab eodem axe. Itaque, si duo tantum B, & C, fuerint pondera pendulum componentia, quorum commune centrum gravitatis sit D, invenietur in axe penduli AD centrum oscillationis F, sive distantia ejus ab axe AF, si multiplicatis ponderibus illis B, & C per quadrata suarum ab axe distantiarum AB, AC, dividatur summa productorum per id, quod gignitur, multiplicando utrumque pondus per AD: adeò, ut

$$\text{erit } AF = \frac{B.AB^2 + C.AC^2}{B.AD + C.AD}.$$

Quod si autem pondera B, & C fuerint indefinitè parva, & indefinita paria ex iis pendulum componant, tunc, ut fractio illa pos-

possit nobis exhibere valorem ipsius AF , capiendum est integrale, tam numeratoris $B.AB^2 + C.AC^2$, quàm denominatoris $B.AD + C.AD$: adeò, ut valor ipsius AF erit integrale numeratoris applicatum ad integrale denominatoris. Et ratio est, quia in hoc casu numerator ejus fractionis est differentia quantitatis, quæ oritur, multiplicando pondera omnia, pendulum componentia, per quadrata suarum ab axe distantiarum; denominator verò est differentia ejus, quæ gignitur, multiplicando summam ponderum omnium per distantiam communis centri gravitatis ab eodem axe.

Ponamus jam ponduscula B , & C inter se æqualia esse, itemque rectam BC perpendiculari esse super AD . Et quoniam in hoc casu distantia BC secatur bifariam in D ; erit, tum DB æqualis DC , cum AB æqualis AC . Unde si vocetur AD x , & DB , sive DC y ; fiet tam AB quadratum, quàm AC quadratum $= xx + yy$: adeoque, si unumquodque ex pondusculis æqualibus B , & C dicatur dp ; erit $B.AB^2 + C.AC^2 = 2xxdp + 2yydp$, & $B.AD + C.AD = 2xdp$: proindeque, capiendo integrale quantitatis $xxdp + yydp$, illudque dividendo per integrale alterius quantitatis $xxdp$, habebitur valor ipsius AF ;

$$S. xxdp + yydp$$

eritque adeò $AF = \frac{\text{S. } xxdp + yydp}{\text{S. } xdp}$, designan-

B b 2

S. xdp

gnan-

gnando, ut vulgò fieri solet, litterâ S integrale quantitatis, cui ea præfigitur: quæ quidem est iplissima formula, quam ex methodo suâ elicuit Jacobus Bernoullius in schediasmate, inserto Monumentis Regiæ Scientiarum Academiae Parisiensis anni 1703.

Jam ope hujus formulæ facile erit, definire centrū oscillationis in figuris, tum planis, cum solidis. Ut autem à planis ordiamur, in iis duplicem oscillationis motū consideravit Hugenus; unum nempe circa axem in eodem cum figurâ plano jacentē, quem proinde vocavit agitationem in planum; alterum circa axem ad figuræ planum erectum, quem idcirco agitationem in latus appellavit. Sit itaque figura plana MON, quæ suspensa ex puncto A, existente in axe ejus OD sursum producto, agitetur primò in planum, ita ut suas peragat oscillationes circa axem EE, in eodem cum figurâ plano jacentem. Et oporteat figuræ hujus sic oscillantis oscillationis centrum definire.

FIG.
102.

Capiatur in axe figuræ propositæ OD punctum aliquod D, per quod agatur ordinata MN, bisecta propter axem in ipso puncto D. Et quoniam ordinata ista MN parallela est axi oscillationis EE, singula ejus puncta, dum figura oscillabitur, eâdem velocitate movebuntur: proindeque perinde erit, ac si totum pondus ejus, five etiam
exi-

exigui rectanguli ei adjacentis collectum sit, & coacervatum in puncto D. Unde, quum distantia ipsius ab axe oscillationis designetur per $AD = x$, habebitur in hoc casu $xxdp + yydp = xxdp$, quum ignotæ y nulla ratio sit habenda. Jam verò dp designat pondus exigui rectanguli $DMmd$, sive $DNnd$. Itaque, quia positâ DM , sive DN

S. $uxxdx$

$= u$, sit $dp = udx$, erit $AF = \frac{u}{g}$;

S. $uxdx$

adedque, si in formulâ istâ speciali substituaturs valor ipsius u , qui eruitur ex æquatione datæ figuræ, & quantitates differentiales debitâ ratione integrentur, habebitur pro datâ illâ figurâ valor ipsius AF .

Eadem figura plana MON , suspensa adhuc ex puncto A, agitetur secundò in latus, ita ut suas perficiat oscillationes circa axem EE , erectum ad planum figuræ. Et oporteat figuræ hujus in hunc alium modum oscillantis oscillationis centrum determinare. Quoniam in hoc casu ordinata MN non est parallela axi oscillationis EE , sit hinc, ut singula ejus puncta, sive elementa in oscillatione figuræ nequaquam eâdem velocitate moveantur. Unde procul est, ut supponi possit gravitatem totam ordinatæ MN , sive potius exigui rectanguli ei adjacentis collectam esse, & coacervatam in puncto D;

sed necesse est, ut singulas ejus particulas in propriis locis consideremus; ut earum ab axe oscillationis distantiae habeantur.

Quocirca, ut in hoc casu habeatur valor quantitatis differentialis $xxdp + yydp$, multiplicare oportet, non quidem rectangulum $DMmd$, sive $DNnd$ per quadratum, quod fit ex AD , hoc est adx per xx , ut in præcedenti casu factum est; sed singula elementa ejus rectanguli, habentia dx velut communem altitudinem, per quadrata suarum distantiarum à puncto A . Jam unumquodque elementum ejus rectanguli, habens dx pro suâ altitudine, est $dydx$, quum incognita y designet distantiam cujuslibet illorum à puncto D ; & quadratum distantiae cujusque eorundem elementorum à puncto A est summa quadratorum $xx + yy$, quorum alterum xx est constans, alterum yy variabile: ex quo patet, valorem quantitatis differentialis $xxdp + yydp$ in casu nostro haberi, si capiatur integrale alterius hujus quantitatis differentialis $xxdydx + yydydx$, in qua tantum y , & dy sint variables.

Jam integrale alterius hujus quantitatis differentialis $xxdydx + yydydx$, non aliud variabile continentis, quam y , & dy , est

$$yxxdx + \frac{1}{3}y^3dx, \text{ quod fit } xxxdx + \frac{1}{3}y^3dx, \text{ quum}$$

quum in integratione omnia $dydx$ sunt cō-

prehendenda. Quare erit $uxxdx + \frac{1}{3}u^3dx$

$= xxdp + yydp$; & propterea in casu, de quo agimus, erit AF æqualis integrali quantitatis $3uxxdx + u^3dx$ applicato ad integrale alterius hujus quantitatis $3uxdx$. Unde, si in duabus istis quantitatibus differentialibus substituatur loco u valor, qui eruitur ex æquatione datæ figuræ, & ipsæ quantitates debitâ ratione integrentur; dividendo integrale prioris per integrale alterius, habebitur valor ipsius AF pro datâ illâ figurâ.

Atque hæc pro inveniendō centro oscillationis in figuris planis, sive eæ agitentur in planum, sive etiam in latus. Videamus modo, qua ratione idem centrum oscillationis determinari possit in figuris solidis, in quibus duæ illæ species agitationum distinguī nequaquam possunt. Hunc in finem præmittendum est prius hoc lemma, quod si fuerit circulus aliquis BCF, cujus centrum sit punctum D, diameter recta BC, omnia ejus elementa EFse, multiplicata per quadrata suarum à centro distantiarum DE, tantundem simul efficiant, quantum efficit tota circuli area, multiplicata per quadratum, quod fit ex semisse radii BD.

FIG.

103.

Ponatur enim $BD = 2a$, $DE = x$, & $EF = y$. Erit igitur $Ee = dx$, areola $EFfe = ydx$, & id, quod gignitur, multiplicando areolam $EFfe$ per DE quadratum, $= yxxdx$. Unde eò res redit, ut differentialis hujus quantitatis debitum integrale inveniamus. Ad hoc autem inveniendum, considerare prius oportet, quod, quum propter circulum sit $4aa - xx = yy$, erit a^2

$$= \frac{1}{4}yy + \frac{1}{4}xx. \text{ Adeòque, quia } yxxdx$$

idem est, ac $a^2ydx - \frac{1}{4}y^3dx + \frac{1}{4}yxxdx$; posito in termino $-a^2ydx$ loco a^2 valore ejus,

$$\text{fiet } yxxdx = a^2ydx - \frac{1}{4}y^3dx - \frac{1}{4}yxxdx$$

$$+ yxxdx, \text{ hoc est } yxxdx = a^2ydx -$$

$$- \frac{1}{4}y^3dx + \frac{3}{4}yxxdx. \text{ Jam verò, quum ha-}$$

beatur $4aa - xx = yy$, habebitur differentiando $-x dx = y dy$, sive $x dx = -y dy$. Itaq; si in æquatione illâ loco $x dx$ hic ejus valor substituatur, fiet tandem $yxxdx = a^2ydx$

$$- \frac{1}{4}y^3dx - \frac{3}{4}xyydy.$$

Jam quantitatis hujus differentialis a^2ydx

$\overset{1}{-} \overset{3}{-} y^3 dx - \overset{4}{-} x y y dy$ posteriores duo ter-

$\overset{4}{-} x y^3$. Itaque tantum restat, ut inveniatur integrale termini prioris $a^2 y dx$. Et quidem, quum $y dx$ sit valor areolæ EFfe, erit integrale ejus termini spatium circulare BEF multiplicatum per a^2 , hoc est per quadratum, quod fit ex semisse radii BD. Quocirca, si ex eo, quod oritur, multiplicando spatium circulare BEF per quadratum ex radio BD dimidiato, subducatur quarta pars quætitatis $x y^3$, habebitur integrale quantitatis differentialis $y x x dx$.

Ex quo patet, elementa singula spatii circularis BEF, multiplicata per quadrata suarum à centro distantiarum, tantum efficere, quantum valet productum ex ipso spatio circulari BEF in quadratum ex semisse radii BD, multatum quartâ parte quantitatis $x y^3$. Jam verò, quum loco spatii circularis BEF sumitur ipse quadrans BDH, tunc evanescente $DE = x$, evanescit quoque quantitas $x y^3$. Itaque elementa singula quadrantis BDH, multiplicata per quadrata suarum à centro distantiarum, tantundem efficient, quantum ipse quadrans BDH ductus in quadratum ex radio BD dimidiato; & pro-

pte-

pterea, si elementa singula totius circuli BCF multiplicentur per quadrata, quæ sunt ex distantis suis à centro, tantundem simul efficient, quantum si ipsius circuli area multiplicetur per quadratum ex semisse radii BD.

Hoc lemmate præmissio, haud difficile modo erit generalis illius formulæ usum ostendere, pro inveniendò centro oscillationis figurarum solidarum. Sit enim MON figura aliqua plana, quæ revoluta circa axem suum OD producat figuram aliam solidam. Suspendatur solida ista figura ex puncto A, & suas efficiat oscillationes circa axem EE. Capiatur in axe figuræ OD punctum aliquod D, per quod agatur primò recta HL parallela axi oscillationis EE, tum planum horizontale, sive parallelum plano basis, efficiens sectionem circularem MHNL, & denique recta MN, quæ existens in hoc plano perpendicularis sit ad ipsam HL.

Itaque, quia recta HL parallela est axi oscillationis EE, singula ejus puncta, dum figura oscillabitur, eadem velocitate movebuntur: proindeque perinde erit, ac si totum pondus ejus, sive etiam exigui rectanguli ei adjacentis collectum sit, & coacervatum in puncto D. Quumque eadem sit ratio de singulis rectis eidem EE, sive HL parallelis; idcirco pondera omnium elementorum se-

Fig.

FIG.
102.

Sectionis circularis MHNL supponi possunt collecta, & coacervata in punctis correspondentibus diametri MN. Verum, quia diametri hujus MN puncta omnia nequaquam eadem velocitate moventur, quum diameter ista non sit parallela axi oscillationis EE; nequeunt ulterius singula illa elementa considerari veluti collecta, & unita in centro D, ita ut haberi possit AD pro cujusque distantia ab axe oscillationis, sed considerata sunt ea in correspondentibus punctis diametri BC, quo eorum ab axe oscillationis distantia habeantur.

Hinc si dp designet unumquodque ex iis elementis, ponaturque ut supra $AD = x$, & distantia cujusque eorum elementorum à centro $D = y$: quia omnia dp uni eidemque x correspondent, erit summa omnium $x dp$ productum, quod oritur, multiplicando totam sectionem circulaarem MHNL per AD, & summa omnium $xx dp$ id, quod produci-
tur ex multiplicatione ejusdem sectionis circularis MHNL per AD quadratum. Sed quoniam eadem dp non uni, sed diversis y correspondent; summa omnium $yy dp$ habebitur, si capiantur producta omnia, quæ sunt ex singulis elementis sectionis circularis MHNL in quadrata suarum distantiarum à centro D; hoc est, per ostensum lemma, si ipsa sectio circularis MHNL multiplicetur
per

per quadratum, quod fit ex semisse radii DM, five DN.

Quocirca si ponatur ulterius DM, five DN $= u$, & ratio, quam habet diameter ad circuli circumferentiam statuatur, ut 1 ad a ; erit circumferentia sectionis circularis MHNL $= 2au$, & ipsa ejus sectionis area $= auu$. Unde erit porro summa omnium $x dp$, hoc est S. $x dp = axuu$ summa omnium $xx dp$, hoc est S. $xx dp = axxuu$, & summa omnium $yy dp$, hoc est S. $yy dp = \frac{1}{4} au^4$.

Inventis summis quantitatuum differentialium $x dp$, $xx dp$, & $yy dp$ in ordine ad sectionem circularem MHNL, si earum porro unaquæque multiplicetur per dx , valorem altitudinis exigui cylindri insistentis super sectione illâ circulari, integralia quantitatuum differentialium, quæ inde oriuntur, designabunt easdem illas summas in ordine ad figuram solidam, de qua agitur. Unde quemadmodum in sectione circulari MHNL distantia centri oscillationis ab axe habetur,

dividendo $axxuu + \frac{1}{4} au^4$ per $axuu$, hoc

est $4xx + uu$ per $4x$; ita in totâ figurâ solidâ eadem distantia habebitur, dividendo

I

$S. axxuxdx \div au^4dx$ per $S. axuxdx$, hoc est

4

$S. 4xxuxdx \div u^4dx$ per $S. 4xuxdx$.

Atque hæc quidem est applicatio formulæ illius generalis ad determinandum centrum oscillationis in figuris, tum planis, cum solidis. Res nunc uno, aut uno altero exemplo majoris evidentiae ergo esset ostendenda. Sed quoniam totum hoc negotium pendet ex calculo integrali, cujus regulas, ac præcepta qui benè callet, nullam in exemplis sibi fingendis difficultatem inveniet; ab hoc labore penitus nos abstinebimus, existimantes illud potius operæ pretium esse, identitatem, quæ est inter centrum oscillationis, & centrum percussionis, paulò breviter hoc loco ostensam exhibere.

Sanè identitatem istam non melius ostendi posse crediderim, quàm demonstrando distantiam centri percussionis ab axe, circa quem perficitur motus, eadem omninò ratione determinari, ac definitur distantia centri oscillationis ab eodem axe: nimirum multiplicando singula pondera per quadrata suarum distantiarum ab axe prædicto, & dividendo summam omnium productorum, quæ inde oriuntur, per id, quod producitur ex multiplicatione eorundem ponderum per distantiam communis eorum gravitatis centri ab eodem axe. Sint

FIG.
104.

Sint igitur B, & C duo quævis pondera, quæ mediantibus virgis AB, BC, CA gravitatis expertibus componant machinam, quæ revolvatur subinde circa punctum A, ut axis motus, sive oscillationis EE rectus sit ad planum, quod conspicitur. Erunt itaque AB, AC distantiae eorum ponderum ab axe motus. Quocirca, si ponatur ulterius, D esse commune centrum gravitatis eorum ponderum, & F centrum percussionis, hoc est id, in quo colligitur, & coacervatur momentum eorundem ponderum; res eò redibit, ut ostendamus pondera B, & C, multiplicata per quadrata, quæ fiunt ex AB, & AC, tantundem simul efficere, quantum si eadem pondera B, & C multiplicentur per rectangulum DAF.

Id autem in hunc modum ostendemus. Erigantur ex punctis B, & C rectæ BM, CM, ipsis AB, AC perpendiculares, quæ productæ si opus conveniant cum AD in punctis I, & L. Tum factis IM, LM æqualibus ipsis AB, AC, excitentur ex punctis illis super AD perpendiculares aliæ IN, LN, quæ conveniant in N cum rectis MN eidem AD parallelis. Et denique ex puncto F demittantur super ipsis BM, CM perpendiculares FG, FH.

Itaque per machinæ revolutionem pondera B, & C moventur velocitatibus, designatis

tis per rectas AB , AC , live etiam per rectas IM , LM , iisque suas exercent actiones secundum rectas BM , CM . Est autem ex hypothesis punctum F centrum percussionis, hoc est id, in quo æquilibrata manent momenta eorum ponderum. Igitur ob generale principium æquilibrii erit $B. IM. FG = C. LM. FH$: proindeque, quum ob triangula IMN , LMN similia triangulis FIG , FLH , sit $IM. FG = IN. FI$, itemque $LM. FH = LN. FL$; erit $B. IN. FI = C. LN. FL$.

Et quoniam est $B. IN. FI = B. IN. AI - B. IN. AF$, itemque $C. LN. FL = C. LN. AF - C. LN. AL$; erit $B. IN. AI - B. IN. AF = C. LN. AF - C. LN. AL$; atque aded $B. IN. AI + C. LN. AL = B. IN. AF + C. LN. AF$. Jam verò demissis super AD perpendicularibus BO , CR , propter triangula ABO , ACR similia, & æqualia triangulis IMN , LMN , rectæ AO , AR æquales sunt rectis IN , LN . Quare erit $B. AO. AI + C. AR. AL$, hoc est $B. AB^2 + C. AC^2 = B. AO. AF + C. AR. AF$.

Porro, quia D est commune centrum gravitatis ponderum B , & C ; erit $B. AO + C. AR = B. AD + C. AD$; atque aded multiplicatâ utrâque parte æquationis per AF , erit $B. AO. AF + C. AR. AF = B. AD. AF + C. AD. AF$. Ostensum est autem, esse $B. AB^2 + C. AC^2 = B. AO. AF + C. AR. AF$. Quare erit quoque $B. AB^2 + C. AC^2 = B. AD. AF + C. AD.$

AD.AF; & propterea pondera B, & C multiplicata per quadrata, quæ fiunt ex AB, & AC, tantundem efficient, quantum eadem pondera, multiplicata per rectangulum DAF.

Est igitur centrum percussionis idem omnino cum centro oscillationis; quandoquidem utriusque distantia ab axe motus unâ, eâdemque ratione definitur. Hinc iisdem illis formulis, quibus determinatur in figuris sive planis, sive solidis centrum oscillationis, determinabitur etiam in iisdem figuris centrum percussionis. Et sicuti quum figuræ elementa omnia eâdem velocitate moventur, tunc centrum percussionis confunditur cum centro gravitatis; ita si fieri possit, ut figura aliqua subinde suas peragat oscillationes, ut ejus elementa singula eâdem velocitate ferantur: (id quod non aliter contingere potest, quàm si punctum suspensionis abeat in infinitum;) tunc etiam inter centrum gravitatis, & centrum oscillationis nulla erit differentia.

Verum, quod dicimus centrum oscillationis unum, idemque esse cum centro percussionis, id tunc demum obtinet, quum gravitas ponitur constans, & uniformis, ita ut pondera corporum eorundem massis, sive quantitibus materiæ evadant proportionalia; nam in omni aliâ gravitatis hypothese, ut rectè adnotavit Hermannus

bus in suâ Phoronomiâ semper different ab invicem centrum oscillationis, & centrum percussionis; nec parum errant, qui duo ista centra, nullâ habitâ ratione gravitatis, statim identificant, atq; confundunt. Quod satis liquere potest, si fiat, ut pendulum compositum, cujus partes sint diversæ specificæ gravitatis, in fluido homogeneo suas perficiat oscillationes.

Circa centrum oscillationis illud etiam notatu dignum existimamus, quod ipsum convertatur cum puncto suspensionis: aded nempe, ut si pendulum compositum ex ponderibus B, & C, habeat in F centrum oscillationis, quum suspenditur ex A; existat deinde centrum illud in A, quum vicissim pendulum suspenditur ex F. Ad hoc autem ostendendum, præmittimus primùm hoc theorema, quod si per commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ducatur recta linea axi oscillationis parallela, & singula pondera multiplicentur per quadrata suarum distantiarum ab hac rectâ lineâ; quæ inde oriuntur producta simul sumpta applicata ad id, quod oritur, multiplicando summam ponderum omnium per distantiam inter axem oscillationis, & prædictam rectam lineam, dent intervallum, quo centrum oscillationis inferius est communi centro gravitatis eorum ponderum.

FIG.
105.

Sit itaque pendulum ABC, instructum ex duobus ponderibus B, & C, quorum commune centrum gravitatis sit D. Ponatur axis oscillationis EE rectus ad planum, quod conspicitur, ita ut sicuti AB, AC sunt distantiae ponderum ab hoc axe, ita DB, DC sint distantiae eorundem ponderum à recta lineâ, quæ ducitur per punctum D æquidistanter ipsi EE. Jamque, si F sit centrum oscillationis, ostendendum erit id, quod producit, multiplicando pondera B, & C per quadrata rectarum DB, DC, applicatum ad id, quod oritur, multiplicando eadem pondera B, & C per AD, exhibere distantiam inter comune centrum gravitatis D, & centrum oscillationis F, adeoque esse $B. DB^2 + C. DC^2 = B. AD. DF + C. AD. DF$.

Istud igitur ostendemus hac ratione. Quoniam F est centrum oscillationis; erit $B. AB^2 + C. AC^2 = B. AD. AF + C. AD. AF$. Est autem (demissis super AD perpendicularibus BO, CR) $AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2ADO$, itemque $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2ADR$. Itaque, quum sit etiam $AD. AF = AD^2 + AD. DF$, erit, debitis substitutionibus peractis, $B. BD^2 + AD^2 + 2ADO + C. CD^2 + AD^2 - 2ADR = B + C. AD^2 + AD. DF$; hoc est $B. BD^2 + B. 2ADO + C. CD^2 - C. 2ADR = B. AD. DF + C. AD. DF$,

Et

Et quoniam D est commune centrum gravitatis ponderum B, & C; erit $B.DO = C.DR$: adedque multiplicatâ utraq̃ parte æquationis per $2AD$, erit $B.2ADO = C.2ADR$. Unde, quum in æquatione $B.BD^2 + B.2ADO + C.CD^2 - C.2ADR = B.AD.DF + C.AD.DF$, duo termini æquales $B.2ADO - C.2ADR$ contrarietate signorum se mutuò destruant, supererit $B.BD^2 + C.CD^2 = B.AD.DF + C.AD.DF$, hoc est id, quod fit, multiplicando pondera B, & C per quadrata ipsarum BD, CD, æquale ei, quod oritur, multiplicando summam eorundem ponderum per rectangulum ADF.

Idem autem verum est quoque, si axis oscillationis EE non sit rectus ad planum, quod conspicitur, sed in eo jaceat totus. Nam, quum in hoc casu distantie ponderum ab axe oscillationis EE jaceant in directâ cum distantiis eorundem ponderû à rectâ, quæ ducitur per punctum D æquidistanter ipsi EE, & cum iis constituent duas rectas æquales tum inter se, cum ipsi AD; id, quod evincitur per duodecimam, & decimamtertiam secundi Elementorum Euclidis, ostendetur per quartam, & septimam ejusdem libri, in quas vertuntur duæ illæ propositiones, quum vertex trianguli ad basim accedit.

Hoc posito theoremate haud difficile mo-

dō erit id, quod erat præcipuum, ostendere
 nimirum, punctum suspensionis A, & cen-
 trum oscillationis F ad invicem converti
 Nam quemadmodum, si pendulum suspen-
 datur ex A, invenietur intervallum, quo
 centrum oscillationis F humilior est com-
 muni centro gravitatis D, dividendo B. BD^2
 $\div C.CD^2$ per B.AD $\div C.AD$; ita quoque si
 idem pendulum suspendatur ex F, habebi-
 tur intervallum, quo centrum oscillationis
 depresso est communi centro gravitatis
 D, dividendo B. $BD^2 \div C.CD^2$ per B. DF $\div$
 $C.DF$. Est autem B. $BD^2 \div C.CD^2 = B.AD$,
 $DF \div C.AD.DF$. Itaque id, quod oritur, di-
 videndo B. $BD^2 \div C.CD^2$ per B. DF $\div C.DF$
 erit AD; & consequenter, quum pendulum
 suspenditur ex F, erit A centrum oscilla-
 tionis.

Sed ex ostenso theoremate illud etiam
 colligi potest, quod si idem pendulum com-
 positum nunc brevius, nunc longius sus-
 pensum agitetur, distantia punctorum su-
 sensionis à communi centro gravitatis sint
 inter se in ratione reciproca ejus, quam ha-
 bent distantia centrorum oscillationis ab
 eodem communi gravitatis centro. Sic enim
 centrum oscillationis penduli, ex ponderi-
 bus A, & B compositi, F quidem, quum
 suspenditur ex A, f verò, quum suspendi-
 tur ex a. Dico AD esse ad aD, ut est Df ad
 DF.

Quo-

Quoniam enim , quum pendulum ex A suspenditur, F est centrum oscillationis, erit $B.BD^2 + C.CD^2 = B.AD.DF + C.AD.DF$. Atque ita quoque, quia penduli ex a suspensi f est oscillationis centrum, erit $B.BD^2 + C.CD^2 = B.aD.Df + C.aD.Df$. Unde erit $B.AD.DF + C.AD.DF = B.aD.Df + C.aD.Df$: proptereaque, quia divisâ utrâque parte æquationis per $B + C$, habetur $AD.DF. = aD.Df$, erit ut AD ad aD, ita Df ad DF.

C A P. IX.

De lineâ celerrimi descensus, in quacunque gravitatis hypothesis.

Circa descensum gravium proposita sunt, & resoluta à Recentioribus Geometris plura alia, eaque valde elegantia problemata. Inter hæc celebre est illud, à Galilæo primum quæsitum, tum deinde Geometris propositum à Johanne Bernoullio ineunte anno 1696, & à Viris Celeberrimis Newtono, Leibnitio, Jacobo Bernoullio, & Hospitalio sequenti anno solutum: nimirum, ut inter duo data puncta, in eâdem rectâ verticali non existentia, inveniatur linea, per quam grave corpus proprio pondere descendens, brevissimo tempore eam percurrat.

FIG.
106.

Ut hoc problema resolvamus, præmittendum est prius hoc theorema ; quodd si mobile ab A ad C percurrere debeat spatia duo, per rectam KF à se mutuò divisa, primum quidem velocitate X, alterum velocitate Z, sintque rectæ duæ AB, BC taliter ad illam inclinatæ, ut erecto per punctum B perpendicularo PQ sit, ut X ad Z, ita sinus anguli ABP ad sinum anguli CBQ ; quodd inquam iter à mobili faciendum, quò breviori tempore illud absolvat, sit per rectas AB, BC.

Hoc theoremate usus est olim Petrus Fermatius, Senator Tolosanus, ad inveniendam legem, qua radii lucis refranguntur, ratus naturam in suis functionibus peragendis brevissimum semper tempus impendere. Sed hoc idem in simili negotio usurpavit quoque Christianus Hugenius in tractatu suo de lumine gallicè scripto, cujus hanc attulit demonstrationem. Ponamus primò mobile ab A ad C iter suum instituere per alias quasvis rectas AF, FC, ita ut punctum F sit magis distans ab A, quàm punctum B.

Ducatur FO ipsi AB parallela, & fiat AO perpendicularis super AB, BH perpendicularis super FO, & FG perpendicularis super BC. Itaque, quia rectus est tam angulus KBP, quàm angulus ABH, erit angulus ABK æqualis angulo PBH, adeoque angulus

Ius ABP æqualis angulo HBQ . Est autem, propter perpendicularem FG , angulus CBQ æqualis angulo BFG . Quare erit, ut X ad Z , ita sinus anguli HBQ ad sinum anguli BFG . Jam verò sinus horum angulorum, assumptâ BF pro radio, sive sinu toto, sunt rectæ FH , BG . Itaque erit, ut X ad Z , ita FH ad BG , & propterea eodem tempore percurratur FH velocitate X , ac BG velocitate Z . Est autem tempus per AB æquale tempori per OH , & tempus per GC brevius tempore per FC . Quare erit tempus per AB , BC brevius tempore per OF , FC , & consequenter multò brevius tempore per AF , FC .

Ponamus secundò, mobile ab A ad C instituere iter suū per rectas AK , KC , ita ut punctum K sit minus distans ab A , quàm punctum F . Ducatur KN ipsi BC parallela, sitque CN perpendicularis super BC , BM perpendicularis super KN , & KL perpendicularis super AB . Itaque, quia rectus est tam angulus KBQ , quàm angulus MBC , dempto communi MBQ , erit angulus MBK æqualis angulo CBQ . Est autem, propter perpendicularem KL , angulus BKL æqualis angulo ABP . Quare erit, ut X ad Z , ita sinus anguli BKL ad sinum anguli MBK . Jam verò sinus horum angulorum, assumptâ BK pro radio, sive sinu toto, sunt rectæ BL , KM . Itaque erit, ut X ad Z , ita BL ad KM .

& propterea eodem tempore percurratur BL velocitate X , ac KM velocitate Z . Est autem tempus per BC æquale tempori per MN , & tempus per AL brevius tempore per AK . Quare erit tempus per AB , BC brevius tempore per AK , KM , atque adeo multò brevius tempore per AB , BC .

Non dissimili ratiocinio ostendetur idem theorema, si plura, quàm duo, fuerint spatia diversis velocitatibus à mobili peragēda. Ex quo patet, iter obliquū brevissimo tempore expediendum à puncto ad punctum tunc tantum per rectam punctis illis interceptam institui debere, quum per totum iter eadem semper velocitate corpus mobile fertur. Veruntamen, si in itinere illo peragendo debeat corpus per plura media diversæ constitutionis transire, ita ut diversimodè mobili resistentia efficiant, ut non eadem sed diversis velocitatibus per ea feratur, tunc quò brevissimum tempus ad iter illud absolvendum impendatur, consultius erit motum subinde inflectere, ut in unoquoque medio sinus anguli, quem linea motus constituit cum perpendiculari ad medii superficiem erectā, sit ut velocitas, cum qua per medium illud corpus mobile fertur.

FIG.

107.

Atque hinc etiam, quum corpus à puncto A ad punctum N obliquè descendere debet, quia singulis momentis nova acquirat

ve-

velocitatis incrementa, fiet descensus tempore brevissimo; si decidat per talem curvam AMN, ut velocitas, quam reperitur habere in quolibet loco M, sit ut sinus anguli, quem cum verticali MO constituit portio curvæ AM, sive etiam tangens ejus MT. Unde datâ specie gravitatis, vel quod idem est, datâ lege accelerationis, facile erit naturam ejus curvæ definire; & vicissim datâ curvæ naturâ, nullo negotio determinari poterit lex accelerationis, quæ requiritur, ad hoc, ut curva illa brevissimo tempore percurratur.

Uti si ponamus, exempli gratiâ, curvam AMN esse semicycloidem, aut etiam portionem semicycloidis AMB, descriptæ per revolutionem semicirculi BEC super rectâ horizontali AC; quia tangens MT parallela est chordæ BE erit angulus TMO æqualis angulo CBE; adeoque velocitas, quam grave habet in puncto M, erit, ut sinus anguli CBE, hoc est, ut recta CE, si BC velut radius, sive sinus totus assumatur. Est autem, propter semicirculum, recta CE, ut radix altitudinis MO. Itaque eadem velocitas in loco M erit in subduplicatâ ratione ipsius MO; proindeque erit semicyclois curva celerissimi descensus in hypothese gravitatis constantis, nempe quum grave subinde motum suum accelerat, ut velocitas acquisita sit.

fit, ut radix altitudinis, per quam descendendo velocitatem illam sibi comparavit.

Similiter si curva AMN sit quadrans, aut portio quadrantis AMB, cujus centrum sit punctum C, quia angulus TMO æqualis est angulo ACM, erit velocitas in loco M, ut sinus anguli ACM, hoc est ut altitudo MO; adeoque erit quadrans circuli linea celerissimi descensus, si grave subinde motum suum acceleret, ut velocitas acquisita sit, ut altitudo, per quam descendendo velocitatem illam acquisivit. Ex quo patet, deceptum esse magnum Galilæum, qui in constanti suâ gravitatis hypothese lineam celerissimi descensus putavit esse circumferentiam maximi circuli.

Itaque posito, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem, & constanti ratione, linea celerissimi descensus erit semicyclois, aut etiam portio semicycloidis, verticem deorsum spectantem habentis. Sed notatu hîc dignum existimamus, semicycloidem AMB, aut quamlibet ejus portionem, (quæ etiam semicycloide ipsâ major esse potest,) tunc demum huic problemati inservire, quum ab A sit motus initium, aut etiam à quolibet ejus puncto M, sed cum eâ velocitate, quæ acquiritur cadendo per MO. Nam si utique ab M ad B ferri debeat grave corpus, & ex M nullâ velocitate incipiat descen-

scendere ; tunc oportebit semicycloidem
 aliam describere , quæ incipiens à puncto
 M transeat per punctum B.

Id autem qua ratione fiat , docuit Johan-
 nes Bernoullius in actis Lipsiensibus anni
 1696 : nimirum , si ductâ horizontali MH,
 describatur super eâ , tamquam basi , semi-
 cyclois MKL , cujus HIL sit semicirculus
 genitor ; nam , si deinde jungantur puncta
 M , & B per rectam MB , quæ secet descri-
 ptam semicycloidem in K , & fiat , ut MK
 ad MB , ita MH ad MP , aut etiam ita HL
 ad PR , semicyclois MR , quæ describitur
 per revolutionem semicirculi PQR , transi-
 bit per punctum B .

FIG.
102.

Neque verò difficile id erit ostendere .
 Nam , quum sit , ut MK ad MB , ita MH
 ad MP , & ita HL ad PR ; recta MR transi-
 bit per punctum L . Unde , quum porro ha-
 beatur , ut MK ad MB , ita ML ad MR ; pa-
 rallelæ erunt rectæ lineæ KL , BR ; adeoque
 ductis horizontalibus KS , BT , similia erunt
 triangula KLS , BRT ; eritque proinde , ut
 KL ad BR , hoc est , ut MK ad MB , sive etiam
 ut HS ad PT , ita KS ad BT . Jam verò , quum
 HL , PR sectæ sint proportionaliter in pun-
 ctis S , & T , HS est ad PT , ut SI ad TQ . Itaque
 erit ex æquali , ut KS ad BT , ita SI ad TQ ,
 atque adeò permutando , dividendo , & ite-
 rum permutando erit , ut KI ad BQ , ita SI
 ad

ad TQ . Est autem, ut SI ad TQ , ita arcus LI ad arcum RQ . Quare erit rursus ex æquali, ut KI ad BQ , ita arcus LI ad arcum RQ ; & propterea, quum propter semicycloidem MKL arcus LI æqualis sit rectæ KI , erit etiam arcus RQ æqualis rectæ BQ ; adeoque punctum B erit in semicycloide MBR .

Obiter autem notetur hoc loco velim, quod si fuerint duæ semicycloides MKL , MBR , quæ incipientes ab eodem puncto M habeant bases suas super eadem rectâ MP , & ducatur ex puncto M recta aliqua MKB , quæ secet utramque semicycloidem in punctis K , & B ; quodd inquam interceptæ semicycloidum portiones MK , MB sint similes inter se, ita nempe, ut portio MK sit ad portionem MB , veluti est semicyclois MKL ad semicycloidem MBR . Sunt enim semicycloides MKL , MBR duplæ diametro-
rum HL , PR , & portiones KL , BR duplæ chordarum IL , QR . Itaque, quia HL est ad PR , ut IL ad QR ; erit etiam, ut MKL ad MBR , ita KL ad BR , & ita MK ad MB .

Jacobus Bernoullius, postquam problematis à Fratre propositi solutionem exhibuerit, aliud circa eandem materiam protulit, quod illius conscriptarium esse videtur: nimirum omnium cycloidum, quæ incipientes ab eodem puncto M secens eandem lineam verticalem HV determi-
nare

nare eam, per quam grave corpus descendendo, perveniat à puncto M ad lineam illam verticalem tempore brevissimo. Solutum porro fuit hoc problema ab utroque Bernoulliorum, quorum in speculationibus hisce geometricis alter alteri, ut ita dicam, invidebat; & uterque invenit cycloidem quæsitam esse illam, quæ incipiens à puncto M habet positionem sui axis super ipsâ rectâ verticali datâ HV , veluti est cyclois MKL . Verum Johannes problema à Fratre propositum ad maiorem universalitatem evexit, nimirum etiam, quum recta data non est verticalis, sed utcumque ad horizontem inclinata.

Quocirca, ut in majori istâ universalitate problema hoc alterum resolvamus, ostendendum est prius hoc theorema; quod tempus descensus per quemlibet cycloidis arcum, sit ut arcus correspondens circuli generatoris directè, & radix diametri ejusdem circuli inversè. Sit itaque semicyclois AMB cujus basis sit recta horizontalis AC , axis recta verticalis BC , & BEC semicirculus generator. Capiatur in perimetro semicyclois portio Mm indefinite parva, & ductis ME , me ipsi AC parallelis, jungantur chordæ BE , CE , Ce . Igitur, quum grave corpus descendit per AM , velocitas, quam in puncto M reperitur habere, erit ut radix altitudinis MO ,
hoc

FIG.
107.

hoc est propter semicirculum, ut chorda CE directè, & radix diametri BC inversè. Ea autem tempus per Mm , ut Mm directè, & velocitas illa inversè. Itaque, quia Mm in omni cycloide datam habet rationem cum EX, idem tempus per Mm erit, ut EX directè, radix ipsius BC etiam directè, & CE inversè.

Jam angulus EXe, nihil vetat, quominus tamquam rectus consideretur, Quare, quum angulus EeX æqualis sit angulo EBC, similia erunt triangula rectangula EXE, CEB; eritque aded, ut Ee ad BC, ita EX ad CE. Tempus itaque per Mm , quod est ut EX directè, radix ipsius BC etiam directè, & CE inversè, erit ut Ee directè, & radix ipsius BC inversè. Quumque eadem sit demonstratio de singulis portionibus, quæ in semicycloidis perimetro sumuntur; consequens est, ut tempus descensus per arcum cycloidis AM, sit ut arcus correspondens semicirculi genitoris CE directè, & radix diametri BC inversè.

FIG.
108.

Huic verò consequens est, ut tempora descensus per arcus similes cycloidum MB, MK sint, ut radices diametrorum PR, HL. Nam ex theoremate mox ostenso tempora per MB, MK sunt, ut arcus PQ, HI directè, & radices diametrorum PR, HL inversè. Jam verò, propter arcus cycloidum similes

miles MB , MK , similes sunt etiam arcus
 circulorum PQ , HI ; adeoque, ut est PQ , ad
 HI , ita est PR ad HL . Quare ex aequali
 tempora descensus per arcus similes cycloi-
 dum MB , MK erunt, ut diametri PR , HL
 directè, & radices earundem diametrorum
 inversè, hoc est ut ipsæ radices diametrorum
 PR , HL directè.

His præmissis, esto nunc MH linea hori-
 zontalis, & HB linea alia, ad eam utcum-
 que inclinata. Sint porrò MKL , MBR plu-
 res cycloides, quæ incipientes à puncto M ,
 habeant omnes bases suas super eadem MH ,
 & oporteat inter cycloides istas determinare
 eam, per quam grave corpus ex M descen-
 dens, accedat ad lineam positione datam HB
 breviori tempore, quàm si per cycloidem
 aliam descenderet.

Sit MKL cyclois talis, cujus basis sit ipsa
 recta MH ; secet autem circumferentiam
 sui circuli genitoris HIL recta linea posi-
 tione data HB in puncto I , per quod agatur
 recta KS parallela ipsi MH , quæ cycloidi
 MKL occurrat in K . Tum jungantur pun-
 cta M , & K per rectam MK , quæ producta
 occurrat ipsi HB in puncto B . Dico cycloi-
 dem MBR , quæ transit per punctum B , eam
 esse, quam quærimus.

Est enim maximorum, & minimorum ea
 natura, ut quum nec illa augeri, nec mi-

nui ista amplius possint, amborum differentialis expressio debeat nihilum adæquare. Notum est autem, eas tantum quantitates differentiatas nihilo æquales esse, quæ magnitudinibus datis, sive constantibus exprimuntur. Itaque inter omnes ejusdem speciei quantitates, quæ maximum, vel minimum admittunt, si aliqua sit, eaque sola, quæ per magnitudines datas, sive constantes exprimitur, ea erit omnium maxima, vel minima.

Hinc igitur fit, ut accedet grave corpus ex puncto M ad rectam positione datam HB breviori tempore per cycloidem MBR , quàm per aliam quamvis, si utique ostendi possit datum esse tempus per arcum MB , nec tempus per alterius cycloidis arcum datum esse. Id autem ostendemus in hunc modum. Quoniam recta MH basis semicycloidis MKL magnitudine, & positione data est; dabitur etiam magnitudine, & positione ejus semicirculus genitor HIL : proindeque, quia recta HB data est positione, dabitur etiam positione tam punctum I , quàm punctum K , adeoque dabuntur magnitudine tam arcus HI , IL , quàm rectæ MK , MB .

Et quoniam tempus per arcum cycloidis MK est, ut arcus semicirculi genitoris HI directè, & radix suæ diametri HL inversè, dabitur tempus per arcum MK . Sed tempus
per

per arcum MK est ad tempus per arcum similem MB in subduplicatâ ratione diametrorum HL , PR , sive etiam in subduplicatâ ratione rectarum MK , MB . Quare, quum data sit ratio ista subduplicata, dabitur etiam ratio, quam habet tempus per arcum MK ad tempus per arcum MB . Ostensum est autem, datum esse tempus per arcum MK . Et igitur erit quoque datum tempus per arcum MB : proptereaque, quia tempus per alterius cycloidis arcum consimilem nequaquam est datum, ut rem attentè consideranti liquidò patet; ex antea dictis illud omnium brevius erit.

Ponamus jam rectam HB verticalem esse, adeòque erectam ad horizontalem MH , ita ut coincidat cum ipsâ HV . Accedent igitur ad invicem puncta tria B , K , I , & singula coincident cum puncto L . Unde, quum in hoc casu cyclois MBR coincidat cum cycloide MKL ; erit ipsa cyclois MKL ea, per quam problemati fit satis. Cæterùm, si concipiamus, rectam positione datam HP revolvì circa punctum H ab HP usq; ad HM , ita ut omnes positiones possibiles referat; locus omnium punctorum B , in quibus eam secant in omni positione arcus celerrimi descensus, erit spiralis $HOBM$, cujus ea est proprietas, ut radius HB sit ad ejus portio-

nem circulo interceptam HI , veluti est semicircumferentia HIL ad arcum HI : cujus rei, à Domino Saurin in Schediasmate suo inserto Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1709 primum adnotatæ, demonstrationem velut facillimam, & cuique obviam præmittendam existimamus.

Hoc idem problema clarissimi Fratres ad majorẽ adhuc universalitatem perduxerunt; nimirum etiam in casu, quum linea positione data non est recta, sed curva quævis geometrica. Quin imò, quia numquam novit natura limitem, eò etiam progressi sunt, ut quod de cycloidibus primum quærebat, deinde ad curvas alias, quæ similes essent inter se, extenderetur. Verũ nescio, num ad rem sit, Tyrones nostros ad subtiliores hæc inquisitiones manuducere. Quocirca rem experiemur in unico tantum casu, eoq; omnium simplicissimo, nimirum, quum lineæ datæ sunt rectæ, & ea, ad quam accedere debet grave corpus, est etiam recta.

FIG.
109.

Detur itaque in lineâ horizontali MH punctum aliquod M , sitque HB recta positione data; & oporteat, determinare rectam ML , per quam grave corpus descendens perveniat ex M ad ipsam HB breviori tempore, quàm si per aliam rectam lineam descenderet. Ducatur verticalis MB , quæ conveniat

niat cum rectâ positione datâ HB in puncto B , tum super MB describatur semicirculus MNB , qui eandem rectam HB secet in N . Dico rectam ML , quæ dividet angulum BMN bifariam, eam esse, quam quærimus.

Ponamus enim rectam ML reverà talem esse, ut portio ejus MI percurratur tempore brevissimo. Itaque, quia tempus per MI est omnium minimum, exprimetur illud quantitatibus datis, sive constantibus. Est autem tempus per MI ad tempus per ML in subduplicatâ ratione rectarum MI , ML . Itaque, quum datum sit tempus per ML , dabitur quoque ratio subduplicatâ rectarum MI , ML : proindeque, si ducatur recta alia Mi priori indefinitè proxima, subduplicata ratio rectarum Mi , Ml adhuc manebit eadem. Est igitur, ut MI ad ML , ita Mi ad Ml . Quare tangens in puncto L , quæ habetur producendo Ll , parallela erit chordæ BN ; adeòque, quum æquales sint arcus hinc inde positi BL , LN , secabitur angulus BMN bifariam per rectam, quam quærimus, ML .

Sit jam recta HB verticalis, adeòque erecta ad horizontalem MH , ita ut parallela fiat ipsi MB . Et quoniam in hoc casu punctum B abit in infinitum, augebitur etiam in infinitum semicirculus MNB . Unde, quum portio ejus MN fiat indefinitè parva, evanescet angulus HMN ; adeòque recta, quam

quærimus, ML secabit bifariam totum angulum BMH ; id quod etiam exinde colligi potest, quia ex constructione generali angulus MIH æqualis oritur angulo IMH . Hinc enim fit, ut quotiescumque rectus ponitur angulus MHI , ad conservandam eorum angulorum æqualitatem, debeat uterque illorum esse semirectus.

Cæterùm, si hic quoque concipiamus, rectam positione datam HB revolvi circa punctum H , ita ut revolutione istâ omnes positiones possibiles acquirat, locus omnium punctorum I invenietur esse circuli circumferentia, descripta ex puncto H tamquam centro, intervalloque HM . Neque etiam difficilis erit hujus rei demonstratio; quandoquidem, propter æquales angulos MIH , IMH , æquales sunt semper rectæ HM , HI .

S E C T I O IV.

De Motu Gravium Violento.

R Eliquum jam est, ut de motu gravium violento sermonem instituamus. Dicuntur autem violento motu gravia moveri, quotiescumque ita quidem feruntur, ut cum vi centripetâ gravitatis agat etiam vis centrifuga, ex motu projectili
or-

orta . De hoc gravium motu tractavit magnus Galilæus, sub titulo de motu projectorum . Verum , quum in eâ tantum hypothesi constiterit, quæ gravitatem ponit constantem , & invariata ; Recentiores , ulterius progressi , generaliter in quacumque gravitatis hypothesi eandem materiam pertractarunt . Quod etsi etiam à Nobis hoc loco præstandum sit ; ad rem tamen existimamus ea , quæ obtinent circa motum projectorum in hypothesi gravitatis constantis, speciatim primum definire.

C A P. I.

De motu projectorum in hypothesi gravitatis constantis.

GRave corpus si sursum, vel deorsum directè projiciatur, in quacumque gravitatis hypothesi , movebitur semper in rectâ lineâ ; quia secundum eandem lineam verticalem agit , tam vis centripeta gravitatis, quàm vis centrifuga , quæ oritur ex motu projectili . Sed non perinde res est , si secundum directionem horizontalem , vel aliam quamvis ad horizontem inclinatam projiciatur ; nam quum in hoc casu duæ illæ vires agant in corpus , secundum diversas rectas lineas, per notissimam earum compo-

tionem, curvam quandam motu suo grave describet.

FIG.
110.

Projiciatur etenim grave corpus ex A secundum directionem AC. Jam si nulla alia vis adesset, in eadem rectâ, eadem velocitate, per leges naturæ notas, semper progredieretur; & æqualibus temporibus describeret æqualia spatia AB, BC. Diviso itaque tempore in particulas æquales, agat vis gravitatis post primam temporis particulam, ubi corpus in B pervenit, efficiatque, ut eodem tempore, quo describeret BC, rectâ descendat per BD. Quia ergo eodem tempore urgetur corpus duobus motibus BC, BD, completo parallelogrammo BCG ED feretur corpus tempore illo per diagonalem parallelogrammi hujus BE.

Eadem ratione, si vis gravitatis desisteret, corpus tertiâ temporis particulâ describeret rectam EF æqualem ipsi BE. Quocirca, si in puncto E agat vis gravitatis secundâ vice, faciatque, ut corpus rectâ descendat per EG eodẽ tempore, quo describeret EF; completo parallelogrammo EFHG, movebitur corpus per diagonalem EH. Atque ita quoque, si in puncto H iterum agat vis gravitatis, & efficiat, ut corpus rectâ descendat per HL eodem tempore, quo vi illâ desistente describeret rectam HI æqualem ipsi EH; feretur corpus quartâ temporis particulâ per dia-

gonalem HK parallelogrammi HIKL.

Hac igitur lege movebitur grave corpus per perimetrum polygoni ABEHK. Diminuantur jam in infinitum singulae temporis particulae, quibus vim gravitatis agere posuimus, & augeatur etiam in infinitum ipsorum numerus. Quumque hac ratione latera polygoni in infinitum minuantur, eorumque numerus in infinitum etiam augeatur; vertetur polygoni perimeter in curvam, adeoque grave corpus continuâ gravitatis actione per curvam istam movebitur.

Jam primum, quod quaeritur circa motum projectorum, est determinatio ejus curvae, per quam mobile fertur, quum projicitur secundum lineam, vel horizontalem, vel utcumque ad horizontem inclinatam. Hæc curva, in hypothese gravitatis constantis, quæ efficit, ut spatia, ab initio motus computata, sint ut quadrata temporum, quamque dumtaxat hoc capite expēdendam nobis proposuimus, est semper linea parabolica. Projiciatur etenim grave corpus secundum rectam AC, quæ sit vel horizontalis, vel utcumque ad horizontem inclinata. Dico gravis semitam fore curvam semiparabolicam.

FIG.
III.

Namque, si vis gravitatis non adesset, nec aer motui projecti obstaret, (quod postre-

munum semper supponitur;) projectum pergeret motu æquabili eadem semper directione, essentque tempora, quibus percurruntur spatii partes AB , AC , AD , AE , ut ipsa spatia percurfa respectivè. Jam accedente vi gravitatis, ob continuam ejus actionem, grave indefinenter deflectet à rectâ AE , & spatia descensus, seu deviationes à lineâ illâ AE eadem erunt, ac si descenderet per verticalem AI .

Sint itaque AF , AG , AH , AI spatia, quæ per vim gravitatis describit corpus interea, ac motu projectili percurrit æquabiliter spatia AB , AC , AD , AE , eruntque spatia AF , AG , AH , AI , ut quadrata temporum, sive etiam, ut quadrata rectarum AB , AC , AD , AE temporibus illis proportionalium, hoc est completis parallelogrammis AK , AL , AM , AN , ut quadrata ordinatarum FK , GL , HM , IN .

Est autem, per compositionem motuum, $AKLMN$ semita, per quam fertur projectum; quum nec motus projectilis impediat vim gravitatis, nec vis gravitatis impedimento sit motui projectili. Quare semita projecti erit talis naturæ, ut quadrata ordinatarum FK , GL , HM , IN sint, ut abscissæ correspondentes AF , AG , AH , AI : proindeque erit curva semiparabolica, quum soli parabolæ competat, ut ordinatæ sint inter se

se in subduplicatâ ratione abscissarum correspondentium.

Obtinet porrò demonstratio, siue linea AC , secundum quam projicitur grave corpus, sit horizontalis, siue utcumque ad horizontem inclinata. Id tantum notatu dignum existimamus, quod quum linea AC est horizontalis, ordinatæ parabolæ rectos angulos constituunt cum suis abscissis, adeoque AI est axis parabolæ. Sed non perinde res est, quum AC inclinatur ad horizontem, quia hoc casu ordinatæ cum suis abscissis constituunt angulos obliquos, adeoque AI est tantum diameter parabolæ. Verum utroque casu AC contingit parabolam in A , utpote quæ parallela est ordinatis ipsius AI .

Liquet etiam ex ipsâ demonstratione, parabolæ projecti motu descriptæ majorem, vel minorem amplitudinem pendere à majori, vel minori velocitate, quacum mobile à projiciente manu projicitur. Nam major, aut minor parabolæ amplitudo dependet ex majori, aut minori longitudine ordinatarum FK , GL , HM , IN , quæ correspondent datis abscissis AF , AG , AH , AI : & profectò ordinatæ istæ, quum sint æquales ipsis AB , AC , AD , AE , quæ datis temporibus projectili motu describuntur, eò evadunt majores, quo majori velocitate projicitur mobile; nam spatium dato tempore descriptum eò
ma-

majus est, quò major est velocitas, qua mobile movetur.

Quum itaque parabolæ amplitudo dependeat ex velocitate mobili impressâ, non abs re erit inquirere, quænam velocitas imprimi debeat mobili, ut possit datam parabolam describere. Quocirca datâ parabolâ AMN , cujus diameter sit recta verticalis AI , parameter hujus diametri recta AE , datum quemvis angulum constituens cum AI , & ordinatæ ejusdem diametri æquidistantes ipsi AE , sequens problema resolvendum nobis proponimus: invenire altitudinem AO , per quam grave descendens acquirat in A talem velocitatem, ut si eâ projiciatur secundum rectam AE , describat motu suo parabolam datam.

Hoc autem problema facili negotio resolvemus, si ejus recordemur, quod de descensu gravium superius à nobis ostensum est: nimirum spatium à gravi in dato tempore cadendo descriptum dimidium esse ejus, quod eodem tempore describeret, si velocitate finali æquabiliter moveretur. Hinc enim fit, ut si problema jam resolutum supponamus, sitque AO altitudo quæsita, & ponamus insuper spatium super rectâ AE velocitate acquisitâ æquabiliter eodem tempore percursum esse rectam AB ; erit AB dupla ipsius AO .

Jam

Jam verò in eodem tempore, per solam vim gravitatis, describi debet spatium alterum æquale ipsi AO in rectâ lineâ verticali AI . Itaque si compleatur parallelogrammum $ABKF$, erit AF æqualis AO , atque adeò FK dupla ipsius AF . Est autem ob parabolæ naturam, ut AE ad FK , ita FK ad AF . Quare erit etiam AE dupla ipsius FK , sive AB , & consequenter quadrupla altitudinis quæsita AO . Ex quo patet, altitudinem AO inventam iri, si constituatur æqualis quartæ parti ipsius AE .

Hinc, si gravia sursum obliquè projiciantur, & sistatur motus ipsorum ad eandem lineam horizontalem, ex qua initium habuit, facile erit id omne determinare, quod ad motum spectat istiusmodi projectorum. In hac siquidem projectione quatuor considerari possunt, velocitas, amplitudo, altitudo, & angulus projectionis. Ita, si AKL sit semita talis projecti, designabit recta AO altitudinem, per quam grave corpus descendere debet, ut velocitatem acquirat, quæ in projectione requiritur; recta AL amplitudinem projectionis; recta IK , quæ bisecat ipsam AL , altitudinem ejusdem projectionis, & CAL angulum, quem constituit cum horizonte linea, per quam grave corpus projici debet. Unde patet, circa talium projectorum motum sex principaliora problemata institui posse,

FIG.
112.

Pri-

Primum est, quum datis velocitate, & amplitudine projectionis, quæritur altitudo unâ cum angulo. Secundum, quum datis velocitate, & altitudine projectionis, quæruntur angulus, & amplitudo. Tertium, quum datis velocitate, & angulo projectionis, quæruntur altitudo, & amplitudo. Quartum, quum datis amplitudine, & altitudine, quæritur velocitas unâ cum angulo. Quintum, quum datis amplitudine, & angulo, quæruntur velocitas, & altitudo. Ac sextum denique, quum datis angulo, & altitudine, velocitatem, & amplitudinem oportet invenire.

Jam si ex puncto L perpendicularis erigatur LC, quæ ipsi AC occurrat in C, atq; huic porro ad rectos angulos excitetur CD, quæ conveniat cum AO in puncto D, erit AD, quadrupla ipsius AO. Nam quum AO sit quarta pars parametri, quæ refertur ad punctum A, erit AC, sive GL quadratû æquale rectângulo, quod fit ex AG, sive CL in quadruplum ipsius AO. Sed, propter triangulum rectangulum ACD, idem AC quadratum est æquale rectângulo, quod fit ex CL in AD. Itaque erit AD æqualis quadruplo ipsius AO.

Sed, quemadmodum in triangulo rectângulo ACD hypotenusa AD est quadrupla rectæ lineæ AO, quæ determinat velocitatem projectionis, ita si demittatur perpendicu-
lum

lum CF , erit portio AF quadrupla rectæ IK , quæ ejusdem projectionis altitudinem definit. Nam sicuti AL est dupla ipsius AI , ita erit CL dupla ipsius BI . Sed, quum CL sit ad BK , ut est AC quadratum ad AB quadratum, sive etiam, ut est CL quadratum ad BI quadratum, eadem CL est quadrupla ipsius BK . Itaque bisecta erit BI in K ; & propterea sicuti CL , sive AF est quadrupla portionis BK , ita quoque erit quadrupla alterius portionis IK .

Hinc, quia in eodem triangulo rectangulo ACD designat perpendicularum CF amplitudinem, & ADC angulum projectionis, liquet sex illa problemata ad alia totidem purè geometrica, posse revocari. Primum etenim erit, quum datis hypotenusâ AD , & perpendicularo CF , quæritur segmentum AF unâ cum angulo ADC . Secundum, quum datis hypotenusâ AD , & segmento AF , quæritur perpendicularum CF unâ cum angulo ADC . Tertium, quum datis hypotenusâ AD , & angulo ADC , quæritur perpendicularum CF unâ cum segmento AF . Quartum, quum datis perpendicularo CF , & segmento AF , quæritur hypotenusâ AD unâ cum angulo ADC . Quintum, quum datis perpendicularo CF , & angulo ADC , quæritur hypotenusâ AD unâ cum segmento AF . Et sextum denique, quum datis segmento AF ,

AF, & angulo ADC, quæritur hypotenu-
sa AD unâ cum perpendicularo CF.

Hæc problemata facili negotio resolvet
quicumque, vel leviter in trigonometricis,
& analyticis versatus est, nec hominis otio
abutentis notam effugere possem, si eorum
resolutionem hîc vellem afferre. Cæterum,
quum amplitudo projectionis designetur per
perpendicularum CF, patet veritas ejus, quod
primus omnium prodidit Galilæus: nimirum
amplitudinem projectionis maximam esse,
quum angulus est semirectus, sive graduum
quadragintaquinque, Nam, quum CF sit
semper una ex ordinatis semicirculi descri-
pti super AD, tamquam diametro; perspi-
cuum est, CF fieri maximam omnium ordi-
natarum istius semicirculi, quotiescumque
angulus ADC, sive CAL semirectum adæ-
quat.

Sed illud etiam exinde non obscure colli-
gi potest, eandem futuram esse projectionis
amplitudinem, sive angulus fuerit minor
quadraginta quinque gradibus, sive major,
sed qui unum rectum cum priori consti-
tuit; quandoquidem perpendicularum CF
ejusdem semper invenietur quantitatatis, sive
angulus CAL fuerit graduum, exempli gra-
tiâ, triginta, sive graduum sexaginta, qui
unâ cum iis nonaginta gradus constituunt.
Unde datis velocitate, & amplitudine pro-
je-

jectionis, si quærat^{ur} angulus cum altitudine, problema duplicem solutionem admittet: quod exinde etiam liquere potest, quia æquatio, quæ invenitur in resolutione problematis, ad duplicem dimensionem ascendit.

Ponatur etenim AD , quæ designat quadruplum altitudinis, unde cadendo data velocitas acquiritur, $= 4a$, amplitudo projectionis AL , sive $CF = b$, & AF , quæ designat quadruplum altitudinis ejusdem projectionis, $= x$. Erit itaque $DF = 4a - x$. Et quoniam, propter triangulum rectangulum ACD , AF est ad CF , ut CF ad DF , erit in terminis analyticis, ut x ad b , ita b ad $4a - x$: unde oriatur æquatio $4ax - xx = bb$, hoc est $xx - 4ax + bb = 0$, quæ quum ad duplicem dimensionem ascendat, consequens est, ut altitudo projectionis, & angulus, ei correspondens, duplicem valorem habere possit.

Quod verò duo isti anguli, qui problemati satisfaciunt, simul unum rectum adæquent, ex ipsâ etiam æquatione deducitur. Nam, quum in eâ coefficientis secundi termini sit $4a$, adæquabit summa radicum incognitæ x ipsam AD ; adedque si AF sit radix una, erit DF radix altera. Est autem ADC angulus projectionis, qui correspondet ipsi AF , & CAD angulus, qui correspondet ipsi DF .

si DF. Itaque duo anguli, qui problemati satisfaciant, sunt ADC, CAD, quos simul sumptos perspicuum est unum rectum adæquare.

Jam igitur datâ velocitate, cum qua grave corpus projicitur, non eadem semper parabola est semita projecti, sed alia, atque alia erit, prout alius, atque alius est angulus projectionis, ejusque amplitudo augebitur usque ad gradum quadragesimum quintum, post quem minuetur ordine retrogrado, tamen si altitudo semper augeatur. Quod, si autem quæratur locus, in quo reperiuntur vertexes principales omnium istarum parabolarum, invenietur esse ellipsis AEOV, cujus axis minor est recta AO, quæ designat altitudinem, unde cadendo acquiritur velocitas data, axis verò major est recta EV, dupla ipsius AO.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam, si AKL sit una ex iis parabolis; ejus vertex principalis erit punctum K, quod invenitur bisecando amplitudinem AL in puncto I, & erigendo perpendicularem IK. Inde demisso super AO perpendiculo KH, si ponatur $AO = a$, $AH = x$, & $KH = y$; erit $AD = 4a$, $AF = 4x$, $DF = 4a - 4x$, & $CF = 2y$. Est autem, propter triangulum re-
ctangulum ACD, ut AF ad CF, ita CF ad DF, hoc est, in terminis analyticis, ut $4x$ ad

ad $2y$, ita $2y$ ad $4a - 4x$. Quare erit $4yy = 16ax - 16xx$, hoc est $yy = 4ax - 4xx$; quæ quidem æquatio quum resolvatur in hanc analogiam, ut yy ad $ax - xx$, ita 4 ad 1, erit ut KH quadratum ad rectangulum AHO, ita EV quadratū ad AO quadratum; & propterea punctum K erit in ellipsi, quæ describitur axibus conjugatis EV, AO.

Verumtamen, ut melius intelligatur, qua ratione omnia puncta istius ellipsis possint esse vertices principales omnium illarum parabolarum; notetur velim, grave corpus non modò projici posse obliquè sursum, verum etiam obliquè deorsum. Itaque, quum grave corpus projicitur obliquè sursum, tum vertex principalis parabolæ, quæ describitur, erit in semiellipsi AEO. Quotiescumque verò idem grave corpus deorsum projicitur obliquè, tunc locus verticis principalis describendæ parabolæ erit in semiellipsi AVO; quum axis ejus reperiat ad alteram partem ipsius AN.

Quemadmodum autem ipsum punctum A est vertex principalis parabolæ, quæ describitur, quotiescumque grave corpus projicitur horizontaliter; ita quoque, si projiciatur verticaliter sursum, erit punctum O describendæ parabolæ vertex, quæ in hoc casu vertitur in lineam rectam. Sed si idem grave corpus verticaliter deorsum fuerit proje-

ctum, tunc vertex principalis semitæ suæ abibit in infinitum, nec ullibi reperietur; quum in hoc casu punctum A , unde incipit projectio, sit, ut ita dicam, ultimus vertex parabolæ, quæ describitur.

FIG.
113.

Præterea notatu hîc etiam dignum existimamus, quod sicuti ellipsis, quæ describitur axibus conjugatis EV , AO , est locus, in quo reperiuntur vertices principales omnium illarum parabolarum; ita circuli circumferentia, quæ describitur centro A , intervalloque AO , sit locus, in quo collocantur foci, sive umbilici earundem parabolarum. Etenim si parabolæ AKL fuerit R focus, sive umbilicus, erit parameter diametri AN æqualis quadruplo ipsius AR . Sed eadem parameter, ex superiùs ostensis, est æqualis etiam quadruplo ipsius AO . Itaque erit AO æqualis AR ; adeoque si centro A , intervalloque AO describatur circuli circumferentia, hæc transibit per punctum R .

Sed illud quoque nolim hîc silentio præterire, quod si per umbilicum R cujuscunque parabolæ ducatur recta AR , quæ producta fecet parabolam ipsam in M , locus omnium punctorum M , quæ hac ratione determinantur, sit parabola alia OM , cujus vertex principalis est punctum O , axis recta ON , umbilicus punctum A , atque adeo parameter axis recta æqualis quadruplo ipsius AO .

AO . Nec obscura est hujus rei demonstratio . Nam, quum R sit umbilicus parabolæ AKM, demisso super AN perpendiculo MHN , erit tam $AR = KR + KI$, quàm $MR = KR + KH$; adeoque erit $MR - AR = KR + KH - KR - KI$, hoc est $MR - AR = AN$. Unde, quum sit $MR = AN + AR$, hoc est $MR = ON$, erit $AM = ON + AO$: id quod indicat punctum M esse in parabolâ OM , cujus vertex principalis est punctum O , axis recta ON , umbilicus verò punctum A .

Quin etiam, ne aliquid hîc missum faciamus, quod scitu sit dignû, notabimus tandem, novam istam parabolam OM contingere parabolas omnes ALM in ipso puncto M, quod eis commune est . Id autem non aliâ meliori ratione demonstrari poterit , quàm ostendendo rectam MT , quæ contingit parabolam OM in puncto M , contingere etiam parabolam ALM in eodem puncto M: quod quidem præstabimus in hunc modum . Quoniam punctum A est umbilicus parabolæ OM , & MT tangens ejus ; erit AM æqualis AT . Jam verò , propter similitudinem triangulorum MAT , MRS , AM est ad AT , ut RM ad RS . Itaque erit etiam RM æqualis RS : & propterea , quum punctum R sit umbilicus parabolæ ALM , continget eam in puncto M recta MT .

Verum enim verò , ut ad motum proje-

FIG.
112.

eorum revertamur, non aliud superest, quàm ut problemata quædam resolvamus, quæ institui solent circa projecta, quorum motus non sistitur ad eandem lineam horizontalem, unde suum initium habuit. Hæc problemata, saltem quæ usum habent in arte ballisticâ, duo sunt. Primum, ut dato angulo projectionis CAL inveniaturs altitudo AO , unde talis cadendo velocitas acquiratur, ut si eâ grave corpus projiciatur, pergat ad datum locum M . Alterum, ut vicissim datâ altitudine AO , unde cadendo acquiritur velocitas projecto, inveniaturs angulus projectionis CAL , ut in descensu suo obliquo transeat grave per punctum M .

Quantum ad primum, ejus solutio nullam difficultatem involvit. Nam semper ac datus est angulus projectionis CAL , datumque punctum M , per quod grave transire debet; dabiturs parabola, sive semita projecti AKM , quum detur, tam diameter ejus AN cum angulo, quem ordinatæ cum abscissis constituunt, quàm punctum M , per quod transit parabola illa. Jam verò datâ parabolâ, datur etiam parameter diametri AN ; quum ductâ MQ ipsi AC parallelâ, inveniaturs parameter illa, faciendo, ut AQ ad MQ , ita MQ ad quartam. Quare si AO constituatur quarta pars hujus parametri, habebitur altitudo quæsitâ.

Quant

Quantum ad secundum, ejus solutio est paulò difficilior, sed analyticè resolvemus illud in hunc modum. Ponatur altitudo data $AO = a$, recta MN , quæ est distantia puncti dati M à verticali AN , $= b$, $AN = c$, & AQ , quæ determinat positionem rectæ MQ , sive AC , $= x$. Erit itaque $NQ = x - c$ (sive etiam $c - x$), & quadratum ex $MQ = xx - 2cx + cc + bb$. Est autem propter parabolam MQ quadratum æquale re-
ctangulo, quod fit ex AQ in quadruplum ipsius AO . Quare erit in terminis analyticis $xx - 2cx + cc + bb = 4ax$, hoc est $xx - 2cx - 4ax + cc + bb = 0$, ex cujus æquationis resolutione orientur pro incognitâ x duo valores, quorum alter erit $c + 2a + \sqrt{4aa + 4ac - bb}$, alter $c + 2a - \sqrt{4aa + 4ac - bb}$.

Sed notetur hoc loco velim, quod si fuerit $bb = 4ac$, hoc est MN quadratum æquale re-
ctangulo quater contento sub AO , & AN ; tunc æquatio futura erit $xx - 2cx - 4ax + cc + 4ac = 0$, & radices duæ incognitæ x , erunt $c + 2a + \sqrt{4aa}$, & $c + 2a - \sqrt{4aa}$, hoc est $c + 4a$, & c . Quod si verò punctum M , fuerit in horizontali AL , tunc quia recta AN fit æqualis zero, sive nihilo, delendi sunt in inventâ æquatione termini omnes, in quibus c reperitur. Quare habebitur $xx - 4ax + bb = 0$, atque adeò duo valores incognitæ

x , erunt $2a \mp \sqrt{4aa - bb}$, & $2a \pm \sqrt{4aa - bb}$.

Cæterum generalis constructio pro omni casu hæc est. Ducatur per datum punctum M recta verticalis MP , & æqualis duplo ipsius AO ; tum centro P , & intervallo mediæ proportionalis inter ON , & quadruplum ejusdem AO , describatur circuli circumferentia, quæ quidem, secando rectam AN , determinabit positionem ipsius MQ , five AC .

Jam si istius sectionis duo sint puncta: (id, quod accidit, quum media illa proportionalis est major, quàm MN ;) problema duobus modis solvi poterit. Quod si autem descripta circuli circumferentia tangat rectam AN in unico puncto: (id, quod contingit, quum eadem illa media proportionalis est æqualis ipsi MN ;) problema unicam tantum solutionem admittet. Et denique si sectio nullibi reperiat: (quod quidem contingit, quum media proportionalis prædicta minor est, quàm MN ;) tunc problema solutu impossibile erit.

C A P. II.

De motu projectorum in quacunque gravitatis hypothesis.

QUæ de motu projectorum superiori capite ostensa sunt, locum sibi vindicant

cant in hypothesi, quòd vis gravitatis eadem, & constanti ratione agat in corpora gravia, quòdque tendat ad punctum indefinitè distans, ita ut gravium directiones possint tamquam parallelæ considerari. Nunc eadem de motu projectorum disputatio ad suam universalitatem est deducenda, deque eo agendum in quacumque gravitatis hypothesi, tendentis ad punctum, cujus distantia à corpore gravi sit finita. Et primò quidem ostendendum est nobis elegans illud theorema, quod primus omnium protulit Acutissimus Newtonus in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis: nimirum areas, quas projecta describunt circa centrum virium, radiis ad idem ductis, consistere in planis immobilibus, & esse temporibus proportionales.

Sit itaque S centrum virium, & projiciatur grave corpus secundum rectam AC. Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat grave motu projectili rectam AB. Idem igitur secundâ temporis parte, si nihil impediret, per notas naturæ leges rectâ pergeret ad C, describeretque rectam BC æqualem ipsi AB: adeò, ut radiis ad centrum actis AS, BS, CS confectæ forent æquales areæ ASB, BSC. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis gravitatis, faciatque, ut corpus de rectâ BC declinet,

FIG.
114.

& pergat in ipsâ BD ; jamque ductâ CD ipsi BS parallelâ, per notissimam virium compositionem, completâ secundâ temporis parte, reperietur corpus in D , in eodem plano cum triangulo ASB , describetque adeo parte illâ temporis triangulum BSD , quod velut æquale triangulo BSC , quum sint in eâdem basi BS , & in iisdem parallelis BS , CD , erit etiam æquale triangulo ASB .

Simili argumento, si vis gravitatis successivè agat in D , F , H , &c. faciens, ut grave corpus singulis temporis particulis declinando à rectis DE , FG , HI describat rectas DF , FH , HK ; jacebunt istæ omnes in eodem plano, & triangulum BSD ipsi DSF , & DSF ipsi FSH , & FSH ipsi HSK æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areae in plano immoto describuntur; & componendo erunt arearum summæ quævis, ut tempora descriptionum. Augeatur jam numerus, & minuatur latitudo triangulorum in infinitum: id, quod fit, quum vis centripeta gravitatis agit indefinenter; & eorum ultima perimeter $ABDFHK$ erit linea curva, eruntque adhuc areae quævis ASD , ASF temporibus proportionales, & in plano immoto consistent.

Ex hoc autem theoremate illud colligi potest, quod velocitas projecti in quolibet suæ orbitæ loco, sit reciprocè, ut perpendi-

cu-

culum, demissum à centro virium in rectam, quæ orbitam in loco illo contingit. Sunt enim velocitates in locis A, B, D, F, H, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BD, DF, FH, HK, quæ æqualibus temporibus describuntur. Jam verò bases istæ, propter æqualia triangula, sunt reciprocè, ut perpendiculara, quæ à centro virium S in ipsas demittuntur. Itaque eadem velocitates erunt inter se reciprocè, ut perpendiculara ista.

Atque hinc datis velocitatibus, quas corpus habet in tribus quibuscumque orbitæ locis, facile erit, centrum virium invenire. Sit enim PQR orbita projecti, quam tangent in punctis P, Q, R rectæ PT, TV, VR. Ad tangentes istas erigantur perpendiculara PA, QB, RC velocitatibus corporis in punctis P, Q, R reciprocè proportionalia, & ductis per terminos eorum A, B, C rectis AD, DE, EC tangentibus PT, TV, VR respectivè parallelis, dabit concursus rectarum TD, VE centrum virium quæsitum.

Sit enim S centrum virium, & demittantur tangentibus PT, TV tum perpendiculara SM, SN ex centro S, tum perpendiculara DF, DG ex puncto D. Itaque velocitas in P ad velocitatem in Q erit ex ostensis, ut SN ad SM. Sed ex constructione velocitas in P est ad velocitatem in Q, ut QB ad PA, hoc est,

Fig.

115.

est, ut DG ad DF. Quare erit ex æquali, ut SN ad SM, ita DG ad DF; atque aded permutando, ut SN ad DG, ita SM ad DF.

Et quoniam completis parallelogrammis SHTK, DITL, SN est ad DG, ut SK ad DL, itemq; SM est ad DF, ut SH ad DI; erit proinde ex æquali SK ad DL, ita SH ad DI. Sunt igitur parallelogramma SHTK, DITL similia, & similiter posita. Quare puncta S, D, T erunt in eâdem rectâ lineâ. Simili argumento ostendemus, puncta S, E, V esse in unâ rectâ. Et igitur centrum virium S reperietur in concursu rectarum TD, VE.

FIG.
114.

Elegantis illius theorematis obtinet etiam conversum: nimirum, quod si projectum vis suâ gravitatis subinde moveatur circa punctum aliquod, ut radiis ad illud actis areas describat in plano immoto, & temporibus proportionales, vis ipsa gravitatis tendat ad punctum illud tamquam centrum. Describat enim grave corpus, projectum secundum rectam AC, vi suâ gravitatis æqualibus temporibus æquales areas ASB, BSD, DSF, FSH circa punctum S, quæ consistat etiam in uno, eodemque plano. Dico S esse punctum, ad quod tamquam centrum dirigitur vis gravitatis.

Nam grave corpus, descriptâ primâ temporis particulâ rectâ AB, si nulla foret vis gravitatis, particulâ secundâ temporis re-

Età pergeret ad C, describeretque rectam BC æqualem ipsi AB. Jam verò per vim gravitatis completâ secundâ temporis particulâ reperitur in D. Itaque in puncto B vis gravitatis suam exercet actionem secundùm rectam ipsi CD parallelam. Est autem BS recta ista parallela; quum propter æqualia triangula ASB, BSC, æqualia sint etiam triangula BSC, BSD, quæ quum habeant eandem basim BS, debent esse quoque in iisdem patallelis. Quare vis gravitatis agit in puncto B secundùm rectam BS. Eodem argumento ostendetur, vim gravitatis in punctis D, F, H agere secundùm rectas DS, FS, HS. Unde, quum rectæ istæ omnes conveniant in S, erit S puuctum, ad quod dirigitur vis gravitatis.

Hinc pro indagando centro virium non aliud criterium certius haberi potest, quàm æquabilis arearum descriptio. Unde, quum in confesso sit apud Astronomos omnes post Keplerum planetas primarios subinde circa solem motus suos attemperare, ut radiis ad illum ductis areas percurrant temporibus proportionales; dicendum est, vim illam, quæcumque ea sit, qua planetæ primarii perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis, & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, ad solem tamquam centrum dirigi. Et par est ratio de planetis secundariis

re-

respectu horum primariorum ; quum novissimis observationibus constet , eos quoque circa suos primarios areas percurrere continuò temporibus proportionales.

Verum hic monitum Lectorem velim, quòd si corpus unum percurrat areas temporibus proportionales circa corpus alterum , quod utcumque movetur ; tunc , ut isto quiescente pergat areas temporibus proportionales percurrere , necesse sit , ut urgeatur vi compositâ ex vi propriâ , tendente ad corpus illud alterum , & ex vi , qua corpus illud alterum urgetur , tendente ad plagam contrariam . Et ratio est , quia si duo , aut plura corpora quomodo-cumque moveantur inter se , eademque novis viribus concitentur , non aliâ ratione fieri potest , ut pergant ea omnia eodem modo moveri inter se , ac si viribus illis novis non essent concitata , quàm si novæ illæ vires æqualiter accelerent corpora , eaque urgeant secundùm lineas parallelas.

Quantum ad orbitam , quam in qualibet gravitatis hypothese describere debet grave corpus de loco dato , secundùm datam rectam , & cum datâ velocitate projectum ; ea non aliter determinari potest , quàm concessis figurarum curvilinearum quadraturis : aded , ut problema istud generaliter conceptum tamquam transcendens haberi debeat,

beat, sitque algebraicum in certis tantum virium hypothefibus. Interim pro nobiliffimi hujus problematis resolutione, præter id, quod primo loco pofuimus, oftendendum eft nobis hoc aliud theorema, Newtono fimiliter ferendum acceptum: fcilicet, quòd fi corpus projiciatur de loco dato fecundum rectam aliquam lineam, & cogente vi quacumque gravitatis describat curvam aliquam, interea ac corpus alterum eadem vi concitatum rectè ascendat, vel descendat, fintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, quòd inquam in omnibus æqualibus altitudinibus eorum velocitates æquentur inter fe.

Sit itaque centrum virium C , & corpus aliquod projectum ex loco V secundum aliquam rectam lineam, describat cogente vi suâ gravitatis, quam utcumque variabilem assumimus, lineam curvam VIK . Descendat autem corpus alterum ab A per D ad ipsum centrum virium C , cujus eadem sit lex gravitatis. Centro C , intervallis quibuscunque describantur circuli concentrici DI , EK , secantes rectam AC in punctis D , & E , curvam verò VIK in punctis I , & K . Dico, quòd si corpora illa habeant in locis D , & I æqualiter distantibus à centro virium C æquales velocitates, etiam in locis E , K , æqualiter quoque distantibus ab eodem centro C , æquales

FIG.
116.

les velocitates habebunt.

Sit enim intervallum circulorum concentricorum DE indefinitè parvum, & ductâ CI occurrente ipsi EK in N , demittatur in IK perpendicularum NT . Quia igitur æquales sunt distantiae CD , CI ; erunt etiam æquales vires, quibus corpora in locis D , & I urgentur versus centrum C . Exponentur hæ vires per æquales lineolas DE , IN ; jamque si vis una IN resolvatur in duas alias IT , NT , liquidò patebit, solam vim IT corpus in curvâ motum accelerare, quum altera NT agendo secundum lineam corporis cursui perpendicularem, nil mutet velocitatem corporis in cursu illo, sed tantum retrahat corpus à cursu rectilineo, faciendo ipsum de orbis tangente perpetuò deflectere, inque viâ curvilineâ VIK progredi. Quare vires corporum acceleratrices in locis D , & I erunt inter se, ut est DE , sive IN ad IT .

Et quoniam velocitates, quæ à duabus quibuscvis viribus generantur, sunt ut vires, & tempora conjunctim; erunt velocitates genitæ per spatia DE , IK in ratione compositâ ex viribus, quæ corpora accelerant in locis D , & I , & ex temporibus, quibus ipsa spatia DE , IK describuntur. Ostensum est autem, vires corporum acceleratrices in locis D , & I esse in ratione rectarum DE , IT , & tempora, quibus describuntur spatia DE ,
 IK ,

IK, ob æqualitatem velocitatum, sunt ut ipsa spatia descripta DE, IK. Itaque velocitates genitæ in cursu corporum per lineas DE, IK erunt in ratione compositâ ex DE, ad IT, & ex DE ad IK, hoc est, componendo has rationes, erunt inter se, ut DE, sive IN quadratum ad rectangulum TIK; adeoque quum, ob triangulum rectangulum INK, quadratum ex IN æquale sit rectangulo TIK, æquales erunt velocitates, quæ generantur in transitu corporum per lineas DE, IK.

Hinc quemadmodum æquales sunt corporum velocitates in locis D, & I, ita etiam æquales erunt velocitates in locis E, & K; eâdemque ratione semper reperientur æquales in locis singulis, quæ sint æqualiter distantia à centro virium C. Eodem autem argumento ostendetur, corpora æquivelocia, & æqualiter à centro distantia, quum ascendant, æqualiter ad æquales distantias retardari; quandoquidem vis gravitatis, quæcumque sit lex ejus, perinde retardat corpora in ascensu, ac ea accelerat in descensu.

Sit jam CA maxima à centro distantia, ad quam corpus in curvâ motum ascendere possit, si de quovis suæ orbitæ loco eâ, quam ibi habet, velocitate sursum projiciatur; erit itaque A locus, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acqui-

rat

rat æqualem velocitati corporis prioris in I. Unde si CABFG sit scala virium, hoc est figura, quæ ordinatis suis DF, EG representet vires gravitatis in locis D, & E, aut etiam I, & K; per ea, quæ superius ostensa sunt, velocitas corporis in quolibet suæ orbitæ loco I erit in subduplicatâ ratione areae correspondentis in scalâ virium DABF; atque adeò dabitur, quum data sit distantia CA.

His positis, pergamus modò ad solutionem problematis de determinandâ semitâ projecti in quacumque gravitatis hyporhesi. Tendat itaque vis quælibet gravitatis ad centrum C, & invenienda sînt puncta lineæ curvæ VIK, quam grave corpus projectum ex loco V secundùm rectam VR describit, cogente vi illâ gravitatis. Sit punctum A locus, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco V velocitatem acquirat, æqualem ei, cum qua projicitur corpus primum. Habebunt igitur duo ista corpora, per ostensum theorema, in omnibus locis æquidistantibus à centro virium C æquales velocitates, & propterea si CABFG sit scala virium, velocitas, quàm corpus in curvâ motum habet in loco quolibet I, erit in subduplicatâ ratione areae correspondentis DABF, hoc est, ut quantitas X, si vocetur XX area ipsa DABF.

Jam lineola IK, dato tempore quam minimo

nimo descripta, est ut velocitas, qua describitur, directè. Itaque erit IK , ut quantitas X . Et quoniam dato tempore, quo describitur IK , datur etiam triangulum ei proportionale CIK ; proinde erit KN , ut data aliqua quantitas Q directè, & distantia CI , five CD inversè; hoc est, ut sola quantitas Z , si vocemus Z quotientem, qui oritur, dividendo Q per CD . Unde, si ponamus quantitatem datam Q talem esse, ut sit in aliquo casu, ut IK ad KN ita X ad Z ; erit in omni casu, hoc est ubicumque capiat lineola IK , quæ dato tempore describitur, ut IK ad KN , ita X ad Z .

Quia igitur IK est ad KN , ut X ad Z ; erit etiã, ut IK quadratum ad KN quadratum, ita XX ad ZZ ; & consequenter erit dividendo ut IN , five DE quadratum ad KN quadratum, ita $XX - ZZ$ ad ZZ . Unde, si ponamus $XX - ZZ = VV$, erit ut DE ad KN , ita V ad Z ; atque adeò, ut DE ad KN , ita rectangulum ex CD in V ad rectangulum ex CD in Z .

Hinc siquidem ex puncto D erigatur perpendicularis Db , ita ut rectangulum ex CD in Z æquale sit rectangulo ex Db in V , idque fiat ubique, & sit abz linea curva, quam perpetuò tangit punctum b ; erit ut DE ad KN , ita rectangulum ex CD in V ad rectangulum ex Db in V , hoc est ut DE ad KN ,

ita CD ad Db . Unde erit rectangulum ex DE in Db æquale rectangulo ex CD , five CI in KN , hoc est areola $DEzb$ æqualis duplo exigui trianguli CKI ; atque adeò componendo erit area tota $VDba$ æqualis duplo areæ totius VIC .

Porrò centro C intervallo, si placet, CV describatur circulus VXY , quem secent in X , & Y rectæ CI , CK . Itaque, propter sectores similes CKN , CYX , erit ut CD quadratum ad CV quadratum, ita rectangulum ex CI in KN ad rectangulum ex CX in XY . Ostensum est autem, rectangulū ex CI in KN æquale esse rectangulo ex DE in Db . Quare erit quoque, ut CD quadratum ad CV quadratum, ita rectangulum ex DE in Db ad rectangulum ex CX in XY .

Hinc siquidem Db extendatur usque in c , ita ut Db sit ad Dc , ut est CD quadratum ad CV quadratum, idque fiat ubique, & sit dcx curva linea, quam perpetuò tangit punctum c ; erit ex æquali ut Db ad Dc , ita rectangulum ex DE in Db ad rectangulum ex CX in XY . Est autem Db ad Dc , ut rectangulum ex DE in Db ad rectangulum ex DE in Dc . Quare erit rectangulum ex CX in XY æquale rectangulo ex DE in Dc , hoc est duplum exigui sectoris CYX æquale areolæ $DExc$; atque adeò erit componendo duplum totius sectoris VCX æquale toti areæ $VDcd$. Est

Est igitur area $VDba$ æqualis duplo ipsius VIC , quæ exprimit tempus per arcum VI , & area $VDcd$ æqualis duplo sectoris VCX , qui determinat angulum VCI . Unde dato tempore quovis, ex quo corpus discessit de loco V , dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur distantia corporis à centro CD , sive CI . Datâ autem CD , datur quoque area $VDcd$, eique proportionalis sector VCX unâ cum angulo VCI . Quare dabitur etiam locus I , in quo corpus completo illo tempore reperietur; quum ex datis angulo VCX , & distantiâ CI facile sit locum illum invenire.

Hæc solutio est ipsissima illa, quam primus omnium exhibuit Acutissimus Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis, sed ni fallor, prout à Nobis allata est, Tyronum captui magis accomodata; nec aliud discriminis occurrit, quàm quod in solutione Newtonianâ areae $VDba$, $VDcd$ non duplæ, sed æquales prodeunt areis correspondentibus VCI , VCX : id, quod in problematis solutione nullam efficit mutationem. Sed iisdem Newtoni vestigiis insistendo, excogitari potest solutio alia, quæ puncta curvæ determinat absque ullâ temporis consideratione, quamque mihi olim communicavit Egregius Mathematicus Jacobus Grazini, qui in nostro Lyceo magnâ

Auditorum multitudine Historiam Ecclesiasticam profitetur.

Nimirum, iisdem ut supra manentibus, erigatur ex puncto D ordinata rectangula Db , quæ sit ad rectam aliquam datam, puta CV , ut est Z ad V , idq; fiat ubique, & sit abz linea curva, quam perpetuò tangit punctum b . Itaque, quia Db est ad CV , ut Z ad V , & ex superius ostensis Z est ad V , ut KN ad DE ; erit ex æquali, ut Db ad CV , ita KN ad DE , eritque adeo rectangulum ex Db in DE , hoc est areola $DEzb$ æqualis rectangulo ex CV in KN . Hæc autem æqualitas ubique reperitur. Quare erit componendo area rota $ADba$ æqualis rectangulo ex CV in DI : proindeque invenietur curvæ punctum I , correspondens puncto D , si centro C , & intervallo CD describatur arcus DI talis magnitudinis, ut sit æqualis ei, quod oritur, applicando aream correspondentem $ADba$ ad rectam magnitudinem datam CV .

In utrâque verò solutione illud requiritur, ut quantitas litterâ Q designata talis sit, ut si ea dividatur per distantiam CD , si ve CI , & dicatur Z quotiens hujus divisionis, sit semper, ut IK ad KN , ita X , si ve latus quadratum areæ $DABF$, ad Z . Quæ autem sit quantitas ista, quæ hunc præstat effectum, haud difficile erit determinare. Nimirum, quum in omni loco debeat esse,

ut

ut IK ad KN , ita X ad Z , obtinebit etiam hæc proportio, quum punctum I accedit ad V . Jam verò recta VR , secundum quam projicitur corpus, contingit curvam VIK in puncto V ; adeoque demisso super eâ perpendiculo CR , sit in puncto V , ut IK ad KN , ita CV ad CR . Quare erit ex æquali, ut CV ad CR , ita X ad Z .

Jam in puncto V quantitas X designat latus quadratum areae $AVHB$, & quantitas Z quotientem, qui oritur, dividendo Q per CV . Igitur erit, ut latus quadratum areae $AVHB$ ad quotientem istum, ita CV ad CR ; & propterea quantitas Q æqualis erit rectangulo, quod fit ex CR in latus quadratum areae $AVHB$. Ex quo jam tollitur difficultas, quæ alicui subnasci poterat, nempe quod in utraq; problematis solutione nulla ratio habita sit positionis rectæ VR , secundum quam projicitur grave corpus; quandoquidem hujusmodi problematis conditio latebat in quantitate, designatâ per litteram Q , utpote quæ alia, atque alia oritur, prout alia, atque alia est positio rectæ VR .

Determinatâ curvâ VIK , si ducenda sit tangens ad aliquod ejus punctum I , id factum facile erit: scilicet, si ad rectam CI , atque ad datum in eâ punctum I constitutur angulus, cujus sinus sit ad radium, si-

ve sinum totum, ut est Z ad X , hoc est in ratione compositâ ex subduplicatâ arearum $AVHB$, $ADFB$, & ex simplici rectarum CR , CD . Nam angulus, quem recta CI constituit cum tangente, est CIK ; & sinus anguli GIK est ad radium, sive sinum totum, ut est KN ad IK , sive etiam, ut Z ad X .

Cæterum hoc problema de determinandâ semitâ projecti in quacumque gravitatis hypothesis per concessas curvarum quadraturas, ut dictum est, solutum primò fuit à Viro summo Isaaco Newtono. Ejusdem problematis solutionem aggressus est etiam deinde Geometra Celeberrimus Johannes Bernoullius, qui eam erudito orbi impertivit occasione solutionis cujusdam specialis, quam exhibuit solertissimus Hermannus in hypothesis, quod vis gravitatis sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae à centro virium, ut apparet ex Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1710. Verum, notante Johanne Keillio in dissertatione suâ de viribus centralibus, solutio Bernoulliana nonnisi in notatione quantitatum differt à Newtonianâ, nec proinde magis ab istâ discrepat, quàm verba latinis litteris expressa differunt ab iisdem verbis scriptis in græcis characteribus.

Etenim, si cum Johanne Bernoullio ponamus rectam magnitudine datam $CV = a$,
ar-

arcum $VX = z$, & distantiam CD sive $CI = x$, erit $XY = dz$, & DE , sive $IN = dx$; atq; adeò quia, propter sectores similes CYX , CKN , CV est ad CD , ut XY ad KN , erit

$$KN = \frac{x dz}{a}, \quad \& \quad IK = \frac{\sqrt{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}}{a};$$

adeòque IK erit ad KN , ut $\sqrt{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}$ ad $x dz$. Unde, si ponamus ulterius aream totam $ACOB = ab$; vim gravitatis in puncto D , hoc est ordinatam $DF = g$, & rectangulum ex CR in latus quadratum areæ $AVHB = ac$; quia areola $DEGF$ fit $g dx$, erit area $CDFO = \int g dx$, hoc est æqualis summæ omnium $g dx$, & area $ADFB = ab - \int g dx$. Est autem IK ad KN , ut X ad Z , hoc est in ratione compositâ ex subduplicatâ arearum $ADFB$, $AVHB$, & ex simplici rectarum CD , CR . Quare erit, elevando terminos omnes proportionis ad quadratum, ut $a^2 dx^2 + x^2 dz^2$ ad $x^2 dz^2$, ita $abxx - xx \int g dx$ ad $a^2 c^2$; hoc est dividendo, ut $a^2 dx^2$ ad $x^2 dz^2$, ita $abxx - xx \int g dx - a^2 c^2$ ad $a^2 c^2$, & consequenter erit, ut adx ad $x dz$, ita

$\sqrt{abxx - xx \int g dx - a^2 c^2}$ ad ac . Unde eruitur ipsissima æquatio, quam pro solutione problematis loco superius citato p. 171. dicitur Johannes Bernoullius, nisi quod hic dicatur g , quod ipse vocavit ϕ .

Itaque in quacumque gravitatis hypothesi, si C sit centrum virium, VR linea projectionis, AV altitudo, unde cadendo acquiritur velocitas, cum qua grave projicitur, CR perpendicularis ad VR , & $CABO$ scala virium; curvæ VIK , quam projectum motu suo describit, hoc erit accidens præcipuum, ut descriptis ex centro C arcibus DI , EK secantibus curvam in duobus punctis I , & K indefinitè proximis, sit semper IK ad KN in ratione compositâ ex subduplicatâ arearum $ADFB$, $AVHB$, & ex simplici rectarum CD , CR . Verum notetur hoc loco velim, quod quum centrum virium C abit in infinitum, atque aded arcus DI , EK evadunt rectæ lineæ perpendiculares ad CV ; tunc ejusdem curvæ natura hæc erit, ut IK sit ad KN in ratione compositâ ex subduplicatâ arearum $ADFB$, $AVHB$, & ex eâ, quam habet radius, sive sinus totus ad sinum anguli DVR . Nam, quum punctum C abit in infinitum, nihil obstat, quominus pro CD capiatur CV , quum differant inter se quantitate DV , quæ respectu ipsarum est indefinitè parva; & rectæ CV , CR tametsi evadant infinitæ, earum tamen ratio non fit æqualitatis, sed est eadem cum illâ, quam habet radius, sive sinus totus ad sinum anguli DVR .

Quocirca in hoc casu curvæ differentialis æqua-

æquatio erit longe simplicior. Etenim, si vo-
cemus abscissam VD , x , & ordinatam DI ,
 y ; erit DE , sive $IN = dx$, $KN = dy$, &
 $IK = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Unde, si porro ponamus
aream $AVHB = aa$, vim gravitatis in
puncto D , hoc est ordinatam $DF = g$,
quia areola $DEGF$ sit gdx , erit area to-
ta $ADFB = aa + \int gdx$. Atque adeò, si
statuamus ulterius rationem, quam habet
radius, sive sinus totus ad sinum anguli
 DVR , esse, ut a ad c ; quia IK est ad KN
in ratione compositâ ex subduplicata area-
rum $ADFB$, $AVHB$, & ex eâ, quam habet
radius sive sinus totus ad sinum anguli
 DVR ; erit, elevando terminos omnes ad
quadratum, ut $dx^2 + dy^2$ ad dy^2 , ita $a^2 + \int gdx$ ad c^2 ; hoc est dividendo, ut dx^2 ad
 dy^2 , ita $a^2 - c^2 + \int gdx$ ad c^2 ; sive etiam
ponendo $a^2 - c^2 = b^2$, & extrahendo ra-
dices quadratas ex terminis proportionis,
ut dx ad dy , ita $\sqrt{b^2 + \int gdx}$ ad c : proin-
deque curvæ differentialis æquatio erit $c dx$
 $= dy \sqrt{b^2 + \int gdx}$, quæ etiam mutabitur in
hanc aliam $adx = dy \sqrt{\int gdx}$, quum angu-
lus DVR rectus supponitur.

Hinc modò, si manente angulo DVR re-
cto, ponamus $g = a$, hoc est vim gravita-
tis constantem esse, ac uniformem, linea ter-
minans scalam virium BFO fiet recta ipsi
AD

AD parallela, eritque tam AV, quam AB, five $DF = a$. Unde, quum in hoc casu sit $gdx = adx$, erit $\int gdx = ax$; atque adeo curvæ differentialis æquatio erit $adx = dy\sqrt{ax}$. Quumque ista, secundum regulas artis integrata, det $2\sqrt{ax} = y$, hoc est $4ax = yy$; liquet curvam VIK, quam describit projectum in constanti gravitatis hypothesi, quum projicitur secundum rectam lineam horizontalem, esse parabolam, cujus vertex principalis est punctum V, axis recta VD, & parameter axis recta alia quadrupla ipsius AV, quæ designat altitudinem, unde cadendo acquiritur velocitas, cum qua projicitur grave corpus: omnino ut in antecedenti capite ostensum est.

Quod si autem in eadem hypothesi, quod sit $g = a$, angulus DVR non fuerit rectus; tunc curvæ differentialis æquatio erit $cdx = dy\sqrt{b^2 + ax}$, quæ etsi integrata secundum quantitates, quæ in eâ continetur, det $2c\sqrt{b^2 + ax} = ay$, quia tamen positâ $x=0$, y non evanescit, sed remanet $ay = 2bc$; erit verum ejus integrale, secundum regulas notatas, $2c\sqrt{b^2 + ax} = ay + 2bc$, atque adeo curvæ æquatio erit $4b^2c^2 + 4ac^2x = a^2y^2 + 4abcy + 4b^2c^2$, hoc est $4ac^2x = a^2y^2 + 4abcy$. Quumque positis $ay = cz$, & $cx = ct + by$, eadem fiat $4ac^2t + 4acby = c^2z^2 + 4abcy$

† $4abcy$; hoc est $4at = zz$; liquet curvam VIK esse etiam parabolam , sed cujus diameter est recta VD , parameter hujus diametri recta alia quadrupla ipsius AV , & ordinatae ad hanc diametrum rectae omnes , quae ipsi VR sunt parallelae : similiter ut in antecedenti capite ostensum est.

C A P. III.

De Inventionem virium , quibus corpora moveri possint in curvis datis.

Circa motum projectorum duo potissimum problemata institui possunt. Primum , ut datâ lege gravitatis inveniatur curva , quam describit projectum motu suo. Alterum , ut datâ vicissim lineâ curvâ , inveniatur lex gravitatis , quae requiritur ad eam describendam . Duo ista problemata valde inter se mutuò differunt . Illud enim generaliter conceptum est naturae trascendentis , nec nisi concessis curvarum quadraturis constitui potest , ut jam superiori capite demonstravimus . Hoc verò per contrarium est semper algebraicum , nec unquam ad quadraturas recurrere opus est , ut id , quod quaeritur , determinetur , quemadmodum ex dicendis in hoc capite abundè patebit.

Ita-

Itaque in hoc loco ostendendum nobis est, qua ratione determinandæ sint vires gravitatis, quæ requiruntur, ad hoc ut projecta moveri possunt in curvis datis. Hunc in finem plura à Recentioribus Geometris excogitata sunt theoremata, sive, ut ipsi loqui amant, formulæ generales, præsertim à Varignonio in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis. Verum, ut liberè dicam, quid sentiam, non alia pro hac re faciliora, & Tyronibus magis accommodata theoremata invenio, quàm quæ primò mihi sese obtulerunt, quum subtilissimis hisce speculationibus cæpi operâ dare. nimirum illa, quæ leguntur in Principiis Philosophiæ Mathematicis Domini Newtoni, qui etsi primus hanc de vi centripetâ doctrinam geometricè pertractaverit, eam tamen ad tantam perduxit perfectionem, ut à subsequentibus Geometris parum admodum ei additum sit.

Consequuntur autem hæc perillustres Newtoni theoremata ex iis, quæ jam à nobis superiùs ostensa sunt. Nimirum primò, quod spatia, quæ ipso motus initio viribus quibuscvis describuntur, sint ut vires, & quadrata temporum conjunctim; adeòque vires ipsæ sint, ut spatia descripta ipso motus initio directè, & quadrata temporum inversè. Et secundò, quod projecta circa centrum

trum virium, in quacumque gravitatis hypothesi, subinde motum suum attemperent, ut radiis ad illud actis areas describant continuò temporibus proportionales. Ex his etenim sequitur, quod si APQ sit curva data, & S centrum virium, capiaturque in curvæ perimetro portio indefinitè parva PQ , quam contingat in P recta PV , actoque radio PS , ducantur ex puncto Q duæ rectæ QR , QT , prior quidem ipsi PS parallela, altera eidem perpendicularis; quod inquam vis gravitatis in puncto P , sit ut QR directè, QT quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè; quandoquidem spatium, quod describitur vi gravitatis, dum grave corpus fertur per PQ , est translatio corporis de tangente in orbem, hoc est recta QR , & tempus per PQ , ut dictum est, designatur per aream PSQ , five etiam per rectangulum ex PS in QT , quod area illius est duplum.

Sed demisso ex centro virium S ad tangentem PR perpendiculo SY , eadem vis gravitatis in puncto P erit quoque, ut QR directè, PQ quadratū inversè, & SY quadratum etiam inversè. Est enim area PSQ duplum, non modò rectangulum, quod fit ex PS in QT , verum etiam rectangulum, quod fit ex PQ in SY . Quocirca eadem illa quantitas, quæ est, ut QR directè, QT quadratū

FIG.
117.

dratum inversè, & PS quadratum etiam inversè, erit quoque, ut QR directè, PQ quadratum inversè, & SY quadratum etiam inversè.

Verùm notetur hoc loco velim, quod et si in utrâque harum formularum, quas protulit Dominus Newtonus pro determinandâ lege gravitatis, unâ cum quantitatibus finitis, existant etiam quantitates aliæ indefinitè parvæ; attamen tota quantitas, cui proportionē correspondet ipsa vis gravitatis, sit semper finita. Estque hujus rei ratio, quia existente PQ, vel QT infinitesimâ primi generis, sit QR infinitesima generis secundi.

Id clariùs apparebit ex tertiâ formulâ, quam idem Newtonus detexit pro determinandâ lege gravitatis, utpote quæ ex solis quantitatibus finitis constat, nec ullæ occurrunt in eâ quantitates indefinitè parvæ. Nam si PSV sit chorda circuli osculantis curvam datam APQ in puncto P, atque aded habentis eandem curvaturam cum arcu PQ, notat Vir Clarissimus eandem vim gravitatis in loco P esse reciprocè, ut solidum, quod sit ex PV in SY quadratum.

Hujus formulæ non aliam affert demonstrationem, quàm quia hac ratione quotiens, qui oritur, dividendo PQ quadratum per QR, sit æqualis ipsi PV. Id autem ut Ty-

sonibus nostris innotescat, sit PX diameter circuli oscillantis curvam APQ in puncto P , & ducatur per punctum Q recta Qx ipsi PR parallela, quæ secet PV in x , & PX in u . Itaque, quia PV est chorda huius circuli, erit angulus PVX rectus, adeoque æqualis angulo XPR , sive Xux . Unde, quum similia sint triangula Pux , PVX , erit ut Pu ad Px , ita PV ad PX ; adeoque rectangulum ex Pu in PX æquale erit rectangulo ex PV in Px , sive QR .

Et quoniam arcus PQ non differt sensibilibiter à suâ chordâ, erit propter circulum rectangulum ex PX in Pu æquale quadrato, quod fit ex PQ . Ostensum est autem, rectangulum ex PX in Pu æquale esse rectangulo ex PV in QR . Itaque rectangulum ex PV in QR æquale erit PQ quadrato; adeoque quotiens, qui oritur, dividendo PQ quadratum per QR , æqualis erit ipsi PV . Unde vis gravitatis in puncto P , quæ est, ut QR directè, PQ quadratum inversè, & SY quadratum etiam inversè, erit quoque reciprocè ut solidum, quod fit ex PV in SY quadratum.

Ex tertiâ istâ formulâ Newtonianâ ultrò sequitur theorema, quod Johannes Bernoullius olim communicavit Egregio Mathematico Abrahamo de Moivre, quodque nobis erit veluti altera formula, qua lex gravitatis

tis solis quantitibus finitis possit exhiberi : scilicet , quod iisdem ut supra manentibus , vis gravitatis in quolibet loco P , sit ut PS directè , radius vel diameter curvaturæ PX inversè , & cubus ex perpendicularo SY similiter inversè.

Nam rectæ PX , SY , velut perpendiculares ad tangentem PR , parallelæ sunt inter se ; adeoque erit angulus VPX æqualis angulo PSY . Unde , quum similia sint triangula rectangula PVX , SYP , erit ut PV ad PX , ita SY ad PS ; & consequenter PV æqualis erit plano ex PX in SY , applicato ad PS , & solidum ex PV in SY quadratum æquale plano-plano ex PX in cubum ex SY , applicato similiter ad PS . Quare vis gravitatis in puncto P , quæ est reciproce , ut solidum ex PV in SY quadratum , erit quoque ut PS directè , & plano-planum ex PX in cubum ex SY inversè.

Habemus ergo quatuor formulas , pro determinandâ lege gravitatis , quæ requiritur ad hoc ut projectum describere possit datam figuram curvilineam ; atque ex iis duæ quidem priores exhibent legem gravitatis quantitibus , non modò finitis , verum etiam indefinitè parvis ; aliæ verò duæ eandem determinant solis quantitibus finitis. Sed videamus modò , qua ratione formulæ istæ generales applicentur casibus specialibus

bus, incipientes à circuli circumferentiâ, quæ est curva omnium simplicissima.

Itaque si curva APQ sit circuli circumferentia, & punctum S , ad quod dirigetur vis gravitatis, sit ipsum circuli centrum, omnes allatæ formulæ ostendent nobis debere esse constantem, & uniformem vim gravitatis, quæ requiritur ad eam describendam. Nam primò, quum in hoc casu perpendiculum SY coincidat cum PS , & QT non differat à PQ ; tam prima, quàm secunda formula dabit vim gravitatis in puncto P , ut QR directè, PQ quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè. Jam verò PS quadratum est idem ubique, adeoque negligi potest. Itaque eadem vis gravitatis in puncto P est, ut QR directè, & PQ quadratum inversè, hoc est reciprocè, ut quotiens, qui oritur, dividendo PQ quadratum per QR ; & consequenter, quia quotiens iste est ipsa dati circuli diameter, dabitur vis gravitatis in loco P .

Secundò, quia existente APQ circuli circumferentiâ, & S centro ejus, coincidunt inter se non modò rectæ PS , SY , verùm etiam rectæ PV , PX ; tam tertia, quàm quarta formula dabit vim gravitatis in puncto P reciprocè, ut solidum ex PV in PS quadratum. Datur autem hoc solidum, quum PV sit ipsa circuli diameter, & PS

eiusdem radius, sive semidiameter. Quare dabitur quoque vis gravitatis in puncto P.

FIG.
118.

Constans autem, & uniformis esse debet gravitas, quæ requiritur ad circuli circumferentiam describendam, quotiescumque vis ipsa gravitatis tendit ad centrum circuli. Verumtamen si centrum virium S utcumque datum fuerit, tunc vis gravitatis in quolibet circumferentiæ loco P erit, ut quadratum distantiae PS inversè, & cubus chordæ PV etiam inversè. Nam si AV sit circuli diameter, & C centrum ejus, quia angulus CPR, tamquam rectus, est æqualis duobus angulis A, & V simul sumptis, & angulus V est æqualis angulo CPV; erit angulus VPR æqualis angulo A: proindeque triangula rectangula APV, PYS similia erunt; eritque aded ut AV ad PV, ita PS ad SY. Unde ob datam AV, erit SY, ut rectangulum ex PV in PS, & consequenter vis gravitatis in puncto P, quæ ob tertiam formulam est reciprocè, ut solidum ex PV in SY quadratum, erit reciprocè, ut plano-solidum ex cubo chordæ PV in quadratum distantiae PS.

Ex quo patet, quod si punctum datum S, ad quod tendit semper vis gravitatis, locetur in circumferentiâ hujus circuli puta in V, vis gravitatis in omni loco P sit reciprocè, ut quadrato-cubus distantiae PV.

Sed

Sed si punctum S fuerit adeò longinquum, ut lineæ omnes PS , QS ad illud ductæ pro parallelis haberi possint, tunc quia PS velut infinita data est, fiet vis gravitatis in puncto P reciprocè ut cubus chordæ PV , quæ designat directionem, secundùm quam agit vis gravitatis.

Sit secundò curva APQ ellipsis, cujus centrum sit punctum C , Aa axis major, Bb axis minor, PG , DK diametri conjugatæ, & PF , Qt perpendicula ad diametros. Tendat autem vis gravitatis ad ipsum ellipseos centrum C , ita ut positâ QR ipsi PC parallelâ, vel etiam completo parallelogrammo PRQ , sit vis gravitatis in puncto P juxta primam formulam, ut QR directè, Qt quadratum inversè, & PC quadratum etiam inversè. Dico, vim gravitatis in puncto P esse directè proportionalem distantiae PC .

Quoniam enim Q , velut tangenti PR parallela, est ordinata diametri PG , erit ex conicis, ut Q quadratum ad rectangulum PuG , ita DC quadratum ad PC quadratum. Sed, propter triangula similia Qut , PCF , Qt quadratum est ad Q quadratum, ut PF quadratum ad PC quadratum. Quare, multiplicando ordine simul terminos utriusque proportionis, erit $Q^2 \cdot Qt^2$ ad $Q^2 \cdot PuG$, hoc est Qt quadratum ad rectangulum PuG , ita $DC^2 \cdot PF^2$ ad PC^2 . $PC^2 = PC^4$.

Constat autem ex conicis, parallelogramma circa ellipseos diametros quasvis conjugatas descripta inter se æqualia esse. Itaque, quum sit $DC \cdot PF = AC \cdot BC$, erit etiam $DC^2 \cdot PF^2 = AC^2 \cdot BC^2$; adedque erit, ut Q quadratum ad rectangulum PuG , ita $AC^2 \cdot BC^2$ ad PC^4 .

Jam rectangulum PuG fit ex Pu , five QR in uG . Sed, propter arcum PQ indefinitè parvum, nihil obstat, quominus scribatur PG , five $2PC$ pro uG . Itaque idem rectangulum PuG fiet ex QR in $2PC$: proindeque erit, ut Q quadratum ad rectangulum ex QR in $2PC$, ita $AC^2 \cdot BC^2$ ad PC^4 ; five etiam ut Q quadratum ad QR , ita $2 \cdot AC^2 \cdot BC^2$ ad PC^3 . Unde, quum, ob datum $2 \cdot AC^2 \cdot BC^2$, cubus ex PC sit, ut QR directè, & Q quadratum inversè; erit vis gravitatis in puncto P , ut cubus ex PC directè, & quadratum ex eâdem PC inversè; adedque directè proportionalis ipsi PC .

Si ellipseos umbilicis ad centrū accedentibus, vertatur ellipsis ipsa in circumferentiam circuli, corpus movebitur in perimetro hujus circuli, & vis ad centrum tendens, perinde ac paulò ante ostensum est, jam erit constans, & uniformis; quum distantia PC , velut semidiameter circuli prædicti, numquam mutetur. Sed si ellipseos centro in infinitum abeunte, vertatur ellipsis

ipsis in parabolam, corpus movebitur in hac parabolâ, & vis tendens ad centrum infinite distans, rursus fiet constans, & æqualis; quum distantia PC , velut infinita, sit eadem ubique. Et denique, si conic sectio parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutatâ, vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hyperbolæ hujus perimetro; sed, quia centrum C abit ad partem alteram, vis centripeta gravitatis mutabitur in vim centrifugam, quæ adhuc distantia PC ubique proportionalis erit.

Mutari quoque potest ellipsis in lineam rectam, scilicet si ejus umbilici ad vertices accedant, quum hac ratione ellipsis latitudo eò usque minuatur, donec coincidat cum ipso axe majore Aa . Sed quorsum ista mutatio memoranda, quum jam cuique notum sit, descensum gravis rectilineum versus centrum fieri posse in quacumque gravitatis hypothesis? Illud potius exinde colligi potest, quod si vis gravitatis sit directè proportionalis distantia locorum à centro virium C , & grave corpus rectâ descendat per altitudinem aliquam AM , tempus hujus descensus designari queat per arcum correspondentem AN circuli, qui describitur centro C , & intervallo CA , quemadmodum jam superius ex aliis principiis demonstravimus.

Nam, ob naturam circuli, & ellipsis, area

circularis ANM est ad aream ellipticam correspondentem APM , ut est MN ad MP . Sed in hac ratione est etiam triangulum MCN ad triangulum MCP . Quare componendo sector circularis ACN erit ad sectorem ellipticum ACP , ut est MN ad MP , hoc est in datâ ratione, quum MN sit ad MP , ut est AC ad BC . Jam verò, quum grave corpus describit circa centrum virium C arcum ellipsis AP , tempus designatur per sectorem ellipticum ACP . Itaque idem tempus per AP poterit etiam designari per sectorem circulare ACN , qui datam servat rationem cum sectore elliptico ACP , sive etiam per arcum AN , cui sector circularis ACN proportionem semper correspondet. Unde, quia diminutâ ellipsis latitudine in infinitum, coincidit illa cum axe AC , & AP fit AM ; erit tempus per AM similiter, ut arcus circuli correspondens AN .

Sed monitum hîc Lectorem velim, quod in hujusmodi demonstrationum speciebus, quæ fiunt per linearum transformationes, summâ opus sit solertiâ, & mentis acumine, quia fieri facile potest, ut Nos in errores inducant. Exemplum hîc elegans dabimus, quod fortè nobis sese obtulit in eâ ipsâ materiâ, quam præ manibus habemus. Nimirum in hypothesis, quod ellipsis APQ describitur vi gravitatis tendente ad centrum C ,

C, ostensum est à nobis, tempus per arcum **AP** designari per sectorem circulare **ACN**, sive etiam per arcum **AN**. Jam verò, ubi centrum **C** abit in infinitum, ellipsis **APQ** vertitur in parabolam, & arcus **AN** mutatur in rectam, quæ ipsi **AC** perpendicularis est infinitæ longitudinis. Itaque, quum grave corpus in hypothese gravitatis constantis describit parabolam **APQ** tempus per quemlibet ejus arcum **AP** designabitur per rectam infinitam: unde consequens esse videtur, æqualia esse tempora per inæquales arcus parabolicos, quod equidem omnino à veritate est alienum.

Ab hac autem difficultate facillimè Nos expediemus, si considerabimus, centro **C** in infinitum abeunte, arcum **AN** non tam mutari in rectam lineam, quàm in parabolam aliam, cujus latus rectum est infinitum; adeòque tempus per arcum parabolicum **AP** designari per arcum correspondentem alterius hujus parabolæ, sive etiam per ejus ordinatam, quæ, ob abscissam **AM** indefinitè parvam respectu ejus, ab arcu illo non differt. Hinc enim facilè intelligemus, quod etsi tempus per arcum **AP** designetur per rectam infinitam, non hinc tamen colligi debeat, tempus illud esse datum; quandoquidem ordinata alterius illius parabolæ est, ut ordinata parabolæ prioris **MP**, quæ utique

data non est ; quum notum sit , quod si circa eundem axem duæ quævis parabolæ describantur , ordinatæ unius datam servent rationem cum ordinatis correspondentibus alterius.

Et quidem , quod tempus per arcum parabolicum AP , quum describitur in hypothesis gravitatis constantis , sit ut ordinata ipsius parabolæ MP ; id colligi primò potest ex ipso theoremate Newtoniano , superiori capite à nobis ostenso , quod projecta circa centrum virium subinde motum suum attemperent , ut radiis ad illud actis areas percurrant continuò temporibus proportionales . Nam in casu nostro centrum , ad quod dirigitur vis gravitatis , infinitè distat . Quare area , quæ percurritur circa centrum virium , quum describitur arcus AP , est rectangulum , quod fit ex rectâ infinitâ in ordinatam MP : proindeque , quum hoc rectangulum proportionale sit ipsi MP ; & ipsa quoque area , sive tempus per AP eidem MP proportionem semper respondebit.

Secundò ostendi id etiam potest ratiocinio magis geometrico in hunc modum . Capiatur in parabolâ portio PO indefinitè parva , & demisso super ordinatâ MP perpendiculo OR , ductâque tangente PT , vocetur parameter parabolæ $4a$; AP, x ; OR, dx ;

dx ; & PR, dy . Jam tempus per PO est, ut PO directè, & velocitas, qua describitur, inversè. Sed velocitas ista, ex superiùs ostensis, ea est, quæ acquiritur cadendo per $a+x$, adeòque designari potest per radicem quadratam ipsius $a+x$. Itaque tempus per PO est, ut exponens rationis, quam habet PO ad $\sqrt{a+x}$. Jam verò PO ad $\sqrt{a+x}$ rationem habet compositam ex PO ad PR , hoc est ex $PT = \sqrt{4ax + 4xx}$ ad $PM = \sqrt{4ax}$, & ex $PR = dy$ ad $\sqrt{a+x}$, hoc est ex $2dy\sqrt{x}$ ad $\sqrt{4ax + 4xx}$: nimirum componendo has rationes, ut dy ad $\sqrt{a}$. Quare idem tempus per PO erit, ut exponens rationis, quam habet PR , sive dy ad $\sqrt{a}$; adeòque proportionalis ipsi PR : Unde infertur, tempus per totum arcum AP proportionale esse ipsi PM .

Itaque, ut ad id, unde discessimus, iterum revertamur, quum grave corpus fertur in perimetro ellipsis APQ , & vis gravitatis tendit ad centrum C , vis illa in omni loco P est directè proportionalis distantiae PC . Et quoniam, centro C eodem in loco manente, ellipsis APQ non in aliam curvam verti potest, quàm in circumferentiam circuli; facile exinde concludi potest, quod in hypothese gravitatis directè proportionalis distantiae locorum à centro grave corpus pre-

projectum describere vicissim debeat circa centrum virium, vel ellipsim, vel etiam circumferentiam circuli, in quam utique ellipsis migrare potest.

FIG.
121.

Neque verò difficile erit, casum distinguere, quum corpus describit ellipsim ab eo, quando circulum describere debet. Patet enim, circulum tunc tantum describi posse, quum linea jactus normalis est ad eam, quæ locum corporis, & centrum virium conjungit. Estoque igitur C centrum virium, & exeat corpus de loco A secundum rectam ipsi AC normalem eâ cum velocitate, quæ acquiritur cadendo per AO , sitque AB ellipsis, quam grave corpus motu suo describit. Concipiatur circa rectam OC scala virium COM , quæ, ob gravitatem directè proportionalem distantiae locorum à centro, terminabitur rectâ CM . Tum centro C , & intervallo semiaxis conjugati CB describatur arcus BD ; & ductâ in scalâ virium ordinatâ DH , erit ut quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in B , ita trapezium $AOMN$ ad trapezium $DOMH$.

Et quoniam CA , CB normales sunt tangentibus in A , & B ; per ea, quæ superius ostensa sunt, erunt velocitates in A , & B in reciproca ratione ipsarum CA , CB . Unde erit, ut CA^2 ad CB^2 , ita trapezium $DOMH$

DOMH ad trapetium AOMN, hoc est ita $CO^2 - CB^2$ ad $CO^2 - CA^2$; atque adeò convertendo erit, ut $CA^2 - CB^2$ ad CB^2 , ita $CA^2 - CB^2$ ad $CO^2 - CA^2$. Quocirca, quum sit $CO^2 = CA^2 + CB^2$; perspicuum est, tunc demum à corpore circulum describi, quum altitudo AO, unde cadendo acquiritur velocitas, cum qua corpus projicitur, talis est, ut quadratum ex CO duplum sit quadrati ex CA.

Ex eo autem quod sit $CO^2 = CA^2 + CB^2$ expedita etiam nobis suboritur methodus, ex datis altitudine AO, & semiaxe uno CA, determinandi semiaxem alterum, atque adeò definiendi ellipsim à corpore describendam: nimirum si centro C, & intervallo CO descripto arcu OF, erigatur ex loco corporis A perpendicularis AF, eum secans in F. Nam, quum sit CF^2 , sive $CO^2 = CA^2 + AF^2$, erit AF semiaxis alter. Sed eadem determinatio obtinet etiam si corpus exeat de loco P, & linea jactus non sit perpendicularis ad PC. Nam si ipsius PC sit TC semidiameter conjugata, quam ad definiendam ellipsim oportet determinare, quia constat ex conicis, summam quadratorum duorum axium ellipseos æqualem esse summæ quadratorum, quæ fiunt ex duabus quibuscumque diametris conjugatis, erit CO^2 , sive $CF^2 = CP^2 + CT^2$; adeoque datis semi-

midiametro unâ CP , & altitudine PF , unde cadendo acquiritur velocitas projecto inveniatur constructione non dissimili semidiameter altera CT , cujus positio determinabitur per lineam jactus, quum ei parallela esse debeat.

FIG.
120.

In hac hypothefi gravitatis illud etiam notatu dignum occurrit, quod revolutionum in ellipsis universis circa idem centrum factarum æqualia sint tempora periodica, etiamfi ellipses sint inæquales. Nam, quum grave corpus fertur in ellipsi APQ vi gravitatis tendente ad centrum C , tempus per quemlibet eius arcum AP est, ut arcus circularis correspondens AN . Quocirca si arcus AP dato tempore quam minimo describatur, multiplicando arcum circulare AN per numerum partium totius temporis periodici, habebitur circuli circumferentia tota. Ex quo sequitur, quod totum tempus periodicum per perimetrum ellipsis sit conjunctim, ut tota circuli circumferentia directè, & arcus AN inversè; hoc est, ut exponens rationis, quam habet integra circuli circumferentia ad arcum AN . Data est autem ratio ista, quum arcus circularis AN correspondeat arcui elliptico AP , qui dato tempore quamminimo describitur. Quare dabitur quoque tempus periodicum per totam perimetrum ellipsis, & pro-

& propterea revolutionum in ellipsis universis circa idem centrum factarum æqualia erunt tempora periodica.

Ex quo rursus liquet veritas ejus, quod ex aliis principiis superius ostensum fuit: nimirum, quod si vis gravitatis sit directe proportionalis distantiae locorum à centro virium C , & grave corpus rectè descendat ad centrum usque, æqualia sint tempora descensus per altitudines quasvis AC , MC . Nam, quemadmodum æqualia sunt tempora periodica per integras ellipses, quæ describuntur circa centrum virium C , ita quoque æqualia erunt tempora per quadrantes earum ellipsium. Jam verò altitudines AC , MC considerari possunt velut quadrantes duarum ellipsium, quarum umbilici ad vertices accefferint. Quare tempora descensus per altitudines AC , MC etiam æqualia erunt.

Moveatur jam corpus in ellipsi APQ , sed vis gravitatis tendat, non quidem ad centrum C , sed ad unum ex umbilicis S , ita ut positâ QR ipsi PS parallelâ, ductâque QT eidem PS perpendiculari, sit vis illa in loco P , juxta primam formulam, ut QR directe, QT quadratum inverse, & PS quadratum etiam inverse. Esto H ellipseos umbilicus alter, & junctâ PH , agatur HI , ipsi PR , sive DK parallela. Quia igitur ex co-

ni-

FIG.
119.

nicis æquales sunt anguli, quos rectæ PH, PS constituunt cum tangente PR; erunt etiam æquales anguli PIH, PHI, qui sunt iis alterni; & consequenter æquales rectæ PI, PH. Sed propter æquales CS, CH æquales sunt quoque rectæ ES, EI. Itaque erit PE semisumma ipsarum PS, PH; adeoque æqualis dimidio axis majoris AC.

Et quoniam, propter triangula similia FPE, TQx, PF est ad PE, ut QT ad Qx; erit etiam, ut PF ad AC, ita QT ad Qx. Sed PF est ad AC, ut CB ad CD; & Qx est ad Qu in ratione æqualitatis. Quare erit ex æquali, ut CB ad CD, ita QT ad Qu; adeoque CB² erit ad CD², ut QT² ad Qu². Est autem ex conicis CD² ad PC², ut Qu² ad Pu.2G, sive etiam, ut Qu² ad Pu.2PC. Itaque erit ex æquali ordinando, ut CB² ad PC², ita QT² ad Pu.2PC. Jam verò, quum PC sit ad PE, sive AC, ut est Pu ad Px, sive QR; est etiam ut PC² ad PC.AC, ita Pu.2PC ad QR.2PC. Igitur ex æquo rursus ordinando erit, ut CB² ad PC.AC, ita QT² ad QR.2PC: proindeque erit QT². AC = CB².2QR; sive etiam QT².Aa = Bb².QR.

Porro ellipseos latere recto principali dicto L, erit L.Aa = Bb². Unde, si in æquatione inventâ loco Bb² ponatur valor iste, erit QT².Aa = L.Aa.QR, hoc est QT² = L.

$\equiv L. QR$. Ex quo patet, quotientem, qui oritur, dividendo QT^2 per QR , æqualem esse lateri recto principali L . Quocirca vis gravitatis in puncto P , quæ est, ut QR directè, QT quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè, erit reciprocè ut solidum, quod fit ex L in PS quadratum; hoc est, quia data est quantitas ipsius L , reciprocè, ut quadratum distantiae PS .

Itaque, quum corpus movetur in ellipfi APQ , & vis gravitatis tendit ad umbilicum S , lex ejus hæc erit, ut in quolibet loco P sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae PS . Sed hoc idem verum est etiam, quum corpus fertur in parabolâ, & hyperbolâ, vi ad umbilicum interiorem tendente. Nam, si manente umbilico S , abeat umbilicus alter H , vel in infinitum, vel etiam ad partem alteram respectu verticis a , tunc ellipsis mutabitur, vel in parabolam, vel in hyperbolam, & vis gravitatis adhuc manebit reciprocè proportionalis quadrato distantiae PS . Quod si autem, manente umbilico altero H , ipse umbilicus S , ad quem dirigitur vis gravitatis, vel recedat in infinitum, vel migret ad partem oppositam; tunc ellipsis mutabitur quidem, vel in parabolam, vel in hyperbolam; verum in parabolâ fiet vis gravitatis constans, & uniformis; in hyperbola verò manebit quidem re-

ci-

ciproce proportionalis quadrato distantie PS, sed ex centripetâ evadet centrifuga.

FIG.
117.

Notatu autem dignum existimamus, quod hac occasione ostensum est in ellipsi, atque aded in aliis conicis sectionibus, in quas utique ellipsis migrare potest: nimirum, quod si dividatur QT quadratum per QR , quotiens, qui ex hac divisione oritur, sit latus rectum principale conicæ sectionis. Hinc enim facillimè determinari poterit in omnibus conicis sectionibus diameter curvaturæ, sive etiam radius evolutæ, qui est semissis illius diametri. Nam, si PX sit diameter ista, & Qx recta tangenti PR parallela, quæ conveniat cum PS in puncto x , & cum PX in puncto z ; quemadmodum dividendo QT quadratum per QR , oritur latus rectum principale L , ita dividendo PQ quadratum per Pz nascitur diameter curvaturæ PX : proindeque PX ad L rationem habebit compositam ex PQ quadrato ad QT quadratum, & ex QR , sive Px ad Pz .

Jam, si super PS perpendicularis demittatur XV , & ducatur VZ perpendicularis ad PX , & ZW rursus perpendicularis ad PS ; erunt triangula PQT , Pxz , PZW , PVZ , PXV similia inter se. Quare erit, ut PQ quadratum ad QT quadratū, ita PV ad PW , & ut Px ad Pz , ita PX ad PV : proindeque
PX

PX ad L erit in ratione composita ex PV ad PW , & ex PX ad PV , hoc est in simplici illâ ratione, quam habet PX ad PW ; eritque adeo PW æqualis lateri recto principali L . Unde, si vicissim super PS capiatur portio PW æqualis L , & erectâ perpendiculari WZ , quæ conveniat cum PX , secante tangentem PR ad rectos angulos, in puncto Z , ducatur ZV parallela tangenti PR , & VX parallela ipsi WZ ; determinabit punctum X longitudinem diametri curvaturæ PX , cujus adeo semissis erit radius evolutæ correspondens puncto P .

Quod si punctum P fuerit vertex principalis conicæ sectionis, perpendicularis erit ad tangentem PR tam recta PS , quam recta PX , adeoque coincident inter se duæ istæ rectæ lineæ PS , PX . Unde, quum etiam punctum X coincidat cum puncto W , fiet in hoc casu PW diameter curvaturæ. Ex quo patet, diametrum curvaturæ in vertice principali cujuscunque conicæ sectionis æqualem esse longitudini lateris recti, quod refertur ad verticem illum, & consequenter radium evolutæ in eodem illo vertice æqualem esse dimidio ejusdem lateris recti.

Ista porro generalis constructio pro determinandâ diametro curvaturæ contrahi eleganter potest in hunc modum. Tangenti PR erigatur perpendicularis PX , quæ con-

veniat cum axe Aa in puncto c ; tum supra cZ ipsi Pc æquali, ducatur ZV perpendicularis ad PX , & VX perpendicularis ad PS ; eritque rursus PX diameter curvaturæ. Quod quidem dependet ab hac pulcherrimâ sectionum conicarum proprietate, quod si ex puncto c super PS perpendicularis demittatur cm intercepta portio Pm æqualis sit dimidio lateris recti principalis.

Unde etiam facilius adhuc determinabimus radium evolutæ correspondentem puncto P , qui adæquat semissem ipsius PX ; scilicet si ex puncto c erectâ super PX perpendiculari cd , quæ conveniat cum PS in puncto d , ducatur deinde dn perpendicularis super PS , conveniens cum PX in puncto n ; quandoquidem erit Pn radius evolutæ quaesitus; id, quod exinde dependet, quia, quum sit, ut Pm ad Pd , ita PW ad PV , quemadmodum Pm est semissis ipsius PW , ita quoque Pd semissis est ipsius PV .

C A P. IV.

De motu projectorum in hypothese gravitatis, reciproce proportionalis quadrato distantie.

V Idimus huc usque, qua ratione de-
terminandæ sint curvæ, quas de-
scri-

scribunt projecta in quacumque gravitatis hypothefi ; & quo pacto viciffim definiendæ fint leges virium , quæ requiruntur , ut projecta moveri poffint in curvis lineis datis. Verum, etfi de motu projectorum actum fit in quacumque gravitatis hypothefi; attamen quemadmodum ea , quæ ad motum illum fpectant , in hypothefi gravitatis constantis , vifum eft figillatim , & paulò fufiùs oftendere , quia talis effe creditur gravitas poft Galilæum in corporibus terreftribus ; ita , quæ ad eundem motum pertinent , in hypothefi gravitatis,reciproce proportionalis quadrato diftantiæ, feorfim, & paulò diligentius funt profequenda , quia in corporibus cœleftibus hujufmodi obrinet lex gravitatis.

Ut enim alibi dictum eft , planetæ tum primarii circa solem , cum fecundarii circa fuos primarios fubinde motus fuos attemperant , ut defcribant totidem orbes ellipticos, umbilicos habentes in corporibus illis , & areas percurrant circa illa corpora continuò temporibus proportionales . Itaque , quia, ut fuperiùs demonftravimus , æquabilis arearum defcriptio index eft centri virium; dirigetur vis , qua quifque planeta detorquetur de cursu fuo rectilineo, quem ex naturâ fuâ affectat , ad unum ex umbilicis orbis elliptici , quem defcribit ; & propterea ipfa illa vis in planetis primariis erit reci-

procè proportionalis quadrato distantiae à sole, in planetis verò secundariis reciproce proportionalis quadrato distantiae à suis primariis.

Quin & Celeberrimo Newtono, cui primum suborta sunt hujusmodi cogitata, illud etiam verissimum videtur, hanc legem gravitatis obtinere quoque in corporibus terrestribus, eâ nempe ratione, quia vis gravitatis, qua luna detinetur in orbe suo, videtur esse ejusdem naturæ cum vi gravitatis corporum terrestrium, in quantum duabus hisce viribus propè telluris superficiem æqualia spatia æqualibus temporibus describerentur. Unde in eam sententiam, meo quidem judicio non contemnendam, abiit, ut iisdem omnino legibus gravitent, tum corpora terrestria in terram, tum planetæ primarii in solem, tum denique planetæ secundarii in suos primarios.

Itaque, quum hypothesis gravitatis, reciproce proportionalis quadrato distantiae obtineat saltem in corporibus celestibus; videamus, quæ debeant esse projectorum accidentia in hac gravitatis hypothesis. Et primò quidem illud quæri potest, num posita hac specie gravitatis, præter sectiones conicas, habentes umbilicum interiorem in centro virium, possint projecta curvas alias describere. Planè id videtur supposuisse

Ne-

Newtonus in primâ suorum principiorum editione. Verumtamen, et si hoc verissimum sit, attamen si nullâ ratione fulciatur, semper poterit in dubium revocari. Nam corpus motum in spirali nauticâ, si-ve logarithmicâ, quæ scilicet radios secat in dato angulo, ut facilè ostendi potest, urgetur vi centripetâ, reciproçè proportionali cubo distantiae à centro spiralis; sed eodem notante Newtono non hæc sola spiralis, sed infinite aliæ possunt vi illâ describi.

Primus, quem sciam, Geometra Peritissimus Jacobus Hermannus id ostendere aggressus est in Diario Veneto, mediante calculo integrali; sed, ut rectè observavit Johannes Bernoullius, methodo, cui institit, scopum attingere nequaquam potuisset, nisi aliunde ei notum esset, solas conicas sectiones posse quæsito satisfacere. Hinc ipse Bernoullius aliam demonstrationem loco ejus substituit, deductam ex generali solutione problematis de determinandis curvis, quæ in quacumque gravitatis hypothesi à projectis describuntur. Verum, ut videre est in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1710, est aded perplexa, & implicata, tantasque exigit reductiones, & operationes satis molestas, ac laboriosas, ut eam hic Tyronibus nostris afferre nequaquam operæ pretium duxerim.

Clarissimus Gregorius in Elementis Astronomiæ Physicæ, & Geometricæ exinde collegit, solas conicas sectiones describi posse motu projectorum, quotiescumque vis gravitatis est reciprocè proportionalis quadrato distantiae; quia ellipsis, quæ est una ex curvis tali virium lege describendis, per motum alterius umbilici, non in alias curvas, quàm in parabolam, & hyperbolam mutari potest: quæ ratio apud eos, qui probè norunt systema curvarum, omne momentum obtinebit. Sed tandem ipse Newtonus in alterâ suorum principiorum editione talem hujus rei demonstrationem indicavit, quæ facilis est, & expedita, nec ullum Tyronum animis scrupulum relinquit: nimirum, quod curvatura curvæ describendæ ex datis velocitate, vi centripetâ gravitatis, & positione tangentis detur; & datis umbilico, puncto contactus, & positione tangentis describi semper possit sectio conica, quæ curvaturam illam datam habeat; nec fieri ullo pacto queat, ut figuræ duæ curvilineæ se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ describantur.

Et primò quidem, quod figuræ duæ curvilineæ se mutuo contingentes eâdem vi centripetâ describi nequeant, colligi id potest ex generali theoremate Newtoniano, quod areæ, quas corpora radiis ad centrum

virium actis describunt, sint continuè temporibus proportionales. Porro, quod ex datis velocitate, vi centripetâ, & positione tangentis detur curvatura curvæ describendæ, id etiam constat. Nam, si velocitas, qua cum corpus exit de loco P ea sit, qua lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR ; designabit angulus QPR curvaturam figuræ describendæ. Itaque tantum superest, ut ostendamus, ex datis umbilico, puncto contactus, & positione tangentis describi semper posse sectionem conicam, quæ curvaturam illam datam habeat.

FIG.
117.

Id autem ostendemus in hunc modum. Sit S umbilicus datus, PR tangens, P punctum contactus, & Pn perpendicularis ad PR radius datæ curvaturæ. Ex n in PS demittatur perpendiculum nd , tum ex d in Pn perpendiculum dc , jungaturque Sc . Fiat porro anguli RPS complementum ad duos rectos angulus RPH . Et siquidem PH parallela sit ipsi Sc , figura erit parabola, quæ datis umbilico S , & puncto P , per quod transire debet, facile describetur, capiendo pro axe ejus rectam Sc . Quod si verò PH conveniat cum Sc in puncto aliquo H , tunc figura erit, vel hyperbola, vel ellipsis; hy-

perbola, si puncta S , & H cadant ad eandem partem puncti c ; ellipsis verò, si cadant ad partes contrarias: sed utraque describetur, assumendo punctum H velut umbilicum alterum.

Hujus determinationis ratio pendet ex methodo determinandi radium curvaturæ in sectionibus conicis, quam in calce capituli antecedentis attulimus. Nam, quod sectionem conicam tali pacto determinatam tangat in puncto P recta PR , id utique constat ex constructione, quum anguli RPS sit complementum ad duos rectos angulus RPH . Quare tantum restat, ut ostendamus ejusdem conicæ sectionis Pn esse radium curvaturæ in puncto P . Quod quidem abundè patebit, si memores ejus methodi determinandi radium curvaturæ, consideremus, quod quæcumque sit sectio conica, axis ejus sit recta Sc , & Pc perpendicularis sit ad tangentem PR .

Itaque, si de loco P exeat corpus secundum rectam PR , & urgeatur vi centripetâ reciproce proportionali quadrato distantie PS , movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione, cujus umbilicus erit centrum virium S . Sed, si velocitas, cum qua corpus exit de loco suo P , ea sit, qua lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tem-

tempore corpus idem movere per spatium QR ; demisso super PS perpendiculo QT , erit latus rectum principale conicæ sectionis quotiens, qui oritur, dividendo QT quadratum per QR ; prout in calce capitis antecedentis adnotavimus.

Idem autem latus rectum principale conicæ sectionis est in duplicatâ ratione areae PSQ , quæ dato tempore describitur. Nam, quum ejusmodi latus rectum oriatur, dividendo QT quadratum per QR , erit illud ut QT quadratum directè, & QR inversè. Sed lineola QR , velut dato tempore descripta, est, ut vis centripeta in loco P , hoc est per hypothesim, ut PS quadratum inversè. Itaque idem latus rectum erit, ut QT quadratum directè, & PS quadratum etiam directè ; adeoque in duplicatâ ratione areae PSQ .

Atque hinc, si sectio conica sit ellipsis, erit tempus periodicum in sesquuplicatâ ratione axis majoris. Nam ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est, ut area PSQ , quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum ; adeoque in subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Unde, si axis major dicatur a , axis minor b , latus rectum l , & tempus periodicum t ; erit ab , ut $t\sqrt{l}$, & consequenter a^2b^2 , ut t^2l . Est

autem $b^2 = al$. Itaque factâ substitutione erit a^3l , ut ttl ; hoc est a^3 , ut tt . Unde quadratum temporis periodici erit t , ut cubus axis majoris; adedque ipsum tempus periodicum in sesquuplicatâ ratione ejusdem axis.

Hinc obiter notetur hoc loco velim, tertiam illam legem, quam in motibus planetarum primariorum observavit Sagacissimus Keplerus, nempe quod subinde motus suos circa solem attemperent, ut quadrata temporum periodicorum sint, ut cubi mediarum à sole distantiarum, colligi quoque posse absque ullâ observatione ratio- cinio geometrico ex aliis duabus legibus à Keplero deprehensis; scilicet, quod describant ellipses totidem, in sole umbilicum unum habentes; & quod radiis ad solem actis areas percurrant temporibus proportionales. Nam ex duabus hisce legibus, ut superius vidimus, sequitur planetas primarios gravitare in solem, & cujusque vim gravitatis decrescere in duplicatâ ratione distantiae. Unde legibus à Keplero observa- tis ultrò præstanda fides; quum non modò non opponantur, sed mirè consentiant inter se.

FIG. Sit jam ellipsis ABa , & ex vertice ejus
 121. principali A exeat grave corpus secundum
 122. tangentem AR , vi tendente ad umbilicum
S;

S ; requiritur velocitas , qua corpus illud projici debet , ut possit datam ellipsim describere . Referat **AO** altitudinem , unde cadendo acquiritur velocitas illa , sitque **SOMN** scala virium . Est **K** ellipseos umbilicus alter , **C** centrum ejus , & **BC** semiaxis minor . Denique centro **S** intervallo **SB** describatur arcus **BD** , ducaturque in scala virium ex puncto **D** ordinata **DH** .

Quoniam igitur **SOMN** est scala virium , designabit area **AOMN** quadratum velocitatis , quam corpus habet in **A** , & area **DOMH** quadratum velocitatis , quam idem corpus habet in **B** . Sed ex superius ostensis eadem velocitates sunt reciproce , ut perpendiculara , quæ ex centro virium **S** ducuntur in rectas , tangentes ellipsim in **A** , & **B** , hoc est in reciproca ratione rectarum **AS** , **BC** . Quare erit ex æquali , ut area **AOMN** ad aream **DOMH** , ita **BC** quadratum , sive rectangulum **ASa** ad **AS** quadratum , hoc est ita **Sa** , sive **AK** ad **AS** .

Jam vires designatæ per ordinatas **OM** , **AN** , **DH** sunt reciproce , ut quadrata distantiarum **OS** , **AS** , **DS** . Quare terminabitur scala virium illa eadem hyperbolâ cubicâ , quæ nobis se obtulit in capite primo sectionis antecedentis : proindeque , per ea , quæ ibidem ostensa sunt , area **AOMN** ad aream **DOMH** habebit rationem compo-

tam

tam ex AO ad DO, & ex DS ad AS. Unde erit rursus ex æquali, ut AK ad AS, ita rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS. Est autem AK ad AS, ut rectangulum ex DO in AK ad rectangulum ex DO in AS. Quare erit rectangulum ex DO in AK æquale rectangulo ex AO in DS; eritque adeò, ut AO ad DO, ita AK ad DS, five BS, vel AC.

Et quoniam AO est ad DO, ut AK ad AC; erit dividendo, ut AO ad AD, ita AK ad CK. Sed, propter æquales AC, DS, æquales sunt quoque rectæ AD, CS, five etiam rectæ AD, CK. Itaque erit pariter AO æqualis AK. Ex quo patet, altitudinem AO, unde cadendo acquiritur corpori velocitas quæsita, æqualem esse distantiae alterius umbilici K ab ipso vertice principali A, unde corpus egredi debet.

Ponamus punctum S, ad quod tendit vis centripeta, esse ellipseos umbilicum inferiorem, & manente umbilico altero K, abeat ille in infinitum. Vertetur itaque ellipsis in parabolam, & corpus movebitur in hac parabolâ gravitate constanti, & uniformi, eritque altitudo AO æqualis quartæ parti lateris recti principalis, quum in parabolâ latus rectum principale sit quadruplum ipsius AK. Sed si centrum virium S sit ellipseos umbilicus superior, eoque manente, abeat

abeat alter K in infinitum, mutabitur quidem ellipsis in parabolam, sed corpus illam describet vi reciproce proportionali quadrato distantiae à centro virium S , & altitudo AO , velut æqualis AK , prodibit infinita.

Horum primum jam ex aliis principiis ostensum fuit, quum egimus de motu projectorum in hypothese gravitatis constantis. Sed & alterum, velut prorsus memorabile, ostendi quoque potest in hunc modum. Sit AB parabola describenda, cujus A sit vertex principalis, S umbilicus, sive centrum virium, AO altitudo quæsitæ, & $SOMN$ scala virium. Erigatur ad AS perpendiculum SB , & centro S , intervallo SB describatur arcus BD , ducaturque in scalâ virium ordinata DH . Designabit itaque area $AOMN$ quadratum velocitatis, quam corpus habet in A , & area $DOMH$ quadratum velocitatis, quam idem corpus habet in B .

Et quoniam propter æquales SB , SD , recta BD tangit parabolam in B , demisso in BD perpendiculo SV , erunt eadem velocitates corporis in A , & B in reciproca ratione rectarum AS , SV . Quare erit ex æquali, ut SV quadratum ad AS quadratum, ita area $AOMN$ ad aream $DOMH$. Sed ratio harum arearum componitur ex AO ad DO , & ex DS ad AS ; adeoque est æqualis rationi, quam

FIG.
123.

quam habet rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS. Itaque erit rursus ex æquali, ut SV quadratum ad AS quadratum, ita rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS.

Porro, quum ex conicis SB dupla sit ipsius AS, erit SB quadratum quadruplum quadrati ex AS. Sed, propter æquales SB, DS, & ob angulum rectum DSB, idem SB quadratum duplum est quadrati, quod fit ex perpendiculo SV. Itaque erit SV quadratum duplum AS quadrati. Ostensum est autem, SV quadratum esse ad AS quadratum, ut est rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS. Quare erit etiam rectangulum ex AO in DS duplum rectanguli ex DO in AS, adeoque æquale rectangulo, quod fit ex DO in duplum ipsius AS.

Jam duplum ipsius AS est recta SB, five DS. Itaque rectangulum ex AO in DS æquale est rectangulo ex DO in DS; proindeque æquales erunt rectæ lineæ AO, DO. Est igitur AO talis magnitudinis, ut non differat à se ipsâ, multatâ rectâ AD, five AS. Quare AS, quæ est quarta pars lateris recti principalis, evanescit respectu ipsius AO: quod non aliter fieri posse perspicuum est, nisi AO sit infinita.

Itaque generaliter, tum in ellipſi, cum in hyperbolâ velocitas, qua corpus exire debet

bet ex vertice principali, ut vi tendente ad unum ex umbilicis eam describat, tanta esse debet, quanta acquiritur cadendo per altitudinem æqualem distantia ejusdem verticis principalis ab umbilico altero. Sed hoc idem obtinet quoque, quum non ex principali, sed ex alio quolibet vertice corpus egreditur. Nam si centro S , & intervallo cujuslibet distantia SP describatur arcus PQ , velocitas in P tanta erit, quanta acquiritur cadendo per OQ : & profectò, quum sit $SO = Aa = SP + PK$, erit $OQ = PK$, Unde, quum orbita est parabolica, ex quocumque loco corpus egrediatur, erit semper prædicta altitudo æqualis quartæ parti parametri, quæ ad locum illum refertur, quum vis tendit ad umbilicum infinitè distantem; & verò erit infinita, quum ad umbilicum alterum vis illa dirigitur.

Eadem determinatio obtinet etiam in hyperbolâ, in quam utique vertitur ellipsis, umbilico altero ad partem verticis oppositam abeunte, ut calculum ineunti facile constabit. Verum ex eo, quod in hyperbolâ umbilicus alter jaceat ad partem oppositam verticis respectu ejus, ad quem dirigitur vis centripeta; altitudo illa invenietur quidem ubique æqualis distantia corporis ab umbilico altero, sed prodibit semper negativa; adeòque collocanda erit ad partem

tem contrariam, hoc est versus ipsum virium centrum. Unde consequens fit, ut sicuti ad describendam parabolam eâ opus sit velocitate, quæ acquiritur cadendo ex infinitâ distantia; ita ad describendam hyperbolam velocitas tanta esse debeat, quanta acquiritur cadendo ex distantia plusquam infinitâ.

Denique illud ostendendum nobis superest, qua ratione corporis in orbe elliptico moti, vi tendente ad unum ex umbilicis ejus, possit inveniri locus ad tempus assignatum. Res autem eò redit, ut abscindatur ex orbe elliptico per rectam, ex centro virium ductam, area dato tempori proportionalis. Id fieret geometricè, si ex dato tempore prodiret area illa per æquationem finitam. Verum nec in ellipsi, nec in aliâ figurâ ovali, quæ non tangatur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus, potest area, rectis pro lubitu abscissa, per finitas æquationes generaliter inveniri: cujus rei sequentem demonstrationem Newtonus excogitavit in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod cùm polum revolvatur perpetuò linea recta, uniformi cum motu, & interea in rectâ illâ exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper eâ cum velocitate, quæ
fit.

fit, ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam, si areæ ovalis à rectâ illâ abscissæ incrementum per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti à polo, quæ huic areæ proportionalis est; adeoque omnia spiralis puncta per æquationem finitam inveniri poterunt. Quod utique falsum est; nam, quum spiralis in infinitis numero punctis à rectâ secetur, æquatio puncta ejus determinans, ut jam Geometris notum est, ad infinitas dimensiones ascendere debet.

Quod autem in hac spirali distantia cujusque puncti à polo proportionalis sit areæ ovalis correspondenti, ostendi potest in hunc modum. Dividatur tempus revolutionis in particulas quamminimas, & æquales. Et quoniam recta circa polum revolvitur motu uniformi, singulis temporis particulis, percurrent circa polum angulos æquales; adeoque areolæ abscissæ, velut totidem sectores similes, erunt ut quadrata rectarum, per quas abscinduntur. Jam verò quadratis istis proportionalia sunt spatiola, quæ iisdem temporum particulis percurrit punctum, quod de polo exit; quum ex hypothese eâ semper pergat velocitate, quæ sit, ut rectæ, super qua movetur, intra ovalem quadra-

tum . Itaque hæc eadem spatiola proportionalia erunt areolis illis ; & propterea componendo spatium totum , hoc est distantia puncti à polo ubique proportionalis erit correspondenti areæ ovalis.

Quum igitur area ellipsis , quæ describitur radio ab umbilico ad corpus mobile ducto , non prodeat ex dato tempore per æquationem finitam , fit hinc , ut nequeat inveniri geometricè locus mobilis ad tempus assignatum . Id novit in motibus planetarum ipse Keplerus Pater Astronomiæ Ellipticæ . Unde illi ἀγεωμετρῆαν objiciebant Astronomi alii , eumque , quasi causis physicis nimium indulgentem , à Geometriâ in diversum abiisse existimabant . Sed maluit Vir Sagacissimus in hoc negotio methodum indirectam adhibere , quàm aliam à naturali hypothesim usurpare , in qua istud facillimè , & directè fieri posset.

Usurpavit verò hypothesim aliam Celeberrimus Astronomus Sethus Wardus ; nam etsi planetæ orbitam cum Keplero statuerit ellipticam , in cujus umbilico altero sol esset , attamen planetæ motum subinde circa alterum umbilicum temperari voluit , ut temporibus æqualibus æquales illic angulos absolveret . Eandem Wardi hypothesim inscius supposuit etiam Ismael Bullialdus , nec id prius agnovit , quàm Wardus in Astro-

Astronomiæ illius fundamenta inquireret . Sed dum suam Astronomiam Philolaicam adversus Wardum tuebatur , correctionem Wardianæ hypothesis talem excogitavit , ut etsi hypothesis ipsa à naturali sit aliena , calculus tamen non multum ab observatis abluderet .

Eandem Wardi hypothesis ferè etiam assumpsit Comes Paganus . Verum , quum in orbe elliptico æquabilis angulorum descriptio circa umbilicum superiorem destruat descriptionem æquabilem arearum circa solem , qui umbilicum occupat inferiorem ; id potiùs in Astronomiâ Keplerianâ mutandum censuit Clarissimus Astronomus Dominicus Cassinus , ut loco orbitæ ellipticæ orbis alius substituatur , in quo æquabilis esset , tum descriptio angulorum , facta circa punctum unum , tum descriptio arearum , quæ circa aliud punctum soli tribuendum peragitur .

Orbem istum Domino Cassino licuit invenire , eumque detexit oportere talis esse naturæ , ut constans esset non summa rectarum , quæ à quolibet orbis puncto ducuntur ad umbilicos , sed rectangulum ex iis . Verum omnes , quotquot sunt hodie , faniore Astronomi agnoscunt , quod licuti orbita circularis , pro explicandis motibus planetarum , circa medias longitudes est

nimis lata ; ita orbita Cassiniana peccet & contrario gracilitate nimia iisdem in locis. Unde , quod summo conatu detexit Cassinus, ipsis observationibus irritum evasit.

Hæc idcirco referre volui , ut constet, nec phaenomenis cœlestibus, nec causis physicis satisfieri , si à Kepleriano systemate recedamus ; adeoque omninò necessariam esse problematis hujus solutionem, de abscindenda per rectam ex umbilico ductam areâ ellipticâ , quæ sit dato tempori proportionalis. Id igitur , quum geometricè fieri nequeat, per cycloidem protractam, descriptam nempe per punctum , sumptum intra perimetrum rotæ revolvantis , quæ est curva mechanica , sive transcendens , præstitit Newtonus in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis , imitatus hac in re Clarissimum Wallisium . Verum , notante eodem Newtono , quum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem verò proximam adhibere.

Et quidem problematis hujus , adeò vulgati inter Peritiores Geometras , plures solutiones per approximationem , sive series infinitas excogitatae sunt ; sed inter omnes non aliam magis expeditam , & praxi commodam invenio , quàm allatam à sæpius laudato Newtono in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis. Pro ejus autem intellectu,

Estu, ostendendum est prius hoc theorema, quod si ellipseos APB sit AB axis major, O centrum, S umbilicus unus, & PR aliqua ad axim ordinatim applicata; descriptoque centro O , & intervallo OA , sive OB circulo AQB , producat PR usque ad Q : quod inquam area elliptica ASP sit, ut differentia inter arcum AQ , & rectam SI , ab umbilico S in radium OQ perpendiculariter demissam.

FIG.
124.

Nam area elliptica ARP est ad aream circulare ARQ in datâ ratione, in eâ nempe, quam habet PR ad QR , sive axis minor ellipsis ad axem majorem. Sed in eâdem ratione est etiam triangulum PSR ad triangulum QSR . Itaque dividendo (vel componendo) habebit quoque area elliptica ASP datam rationem ad aream circulare ASQ . Jam verò area circularis ASQ est semper differentia inter sectorem AOQ , & triangulum OQS ; adeoque æqualis ei, quod producit, multiplicando semissem radii OQ per differentiam inter arcum AQ , & rectam SI . Quare area ellipticâ ASP proportionalis erit huic producto; atque adeò, ob datum radium OQ , proportionalis differentię inter arcum AQ , & rectam SI .

Hoc ostenso theoremate, pergamus ad solutionem problematis Newtonianâ de ab-

scindendâ per rectam ex umbilico ductam
 areâ ellipticâ dato tempore proportionali,
 vel, quod idem est, de inveniendâ loco, in
 quo corpus in elliptici motum vi ad umbili-
 cum tendente reperiri debet ad tempus assi-
 gnatum. Per constructionem quamvis, vel
 utcumque conjecturam faciendo, cognosca-
 tur corporis locus P , proximus verò ejus
 loco p ; demissâque ad axem ellipseos ordina-
 tim applicatâ PR , ex proportionem axium
 ellipseos, dabitur circuli circumscripti AQB
 ordinatim applicata QR , quæ quum sit si-
 nus anguli AOQ , existente radio OA , sive
 OQ , dabitur etiam ipse angulus AOQ ;
 sed in praxi sufficit, angulum istum rudi
 calculo in numeris proximis invenire.

Cognoscatur etiam angulus tempore pro-
 portionalis, idest qui sit ad quatuor rectos,
 ut est tempus, quo corpus descripsit arcum
 Ap , ad tempus revolutionis unius in elli-
 psi, sitque angulus iste N . Porro inveniatur
 tum angulus quidam B , qui sit ad angu-
 lum graduum $57, 29578$, quem arcus ra-
 dio æqualis subtendit, ut est OS ad OA ;
 tum etiam longitudo quædam L , quæ sit
 ad radium in eâdem ratione inversâ, hoc
 est ut OA ad OS . Denique capiatur, & an-
 gulus D ad angulum B , ut est sinus anguli
 AOQ ad radium; & angulus E ad angulum
 $N - AOQ + D$, ut est longitudo L ad lon-
 gi-

gitudinem eandem L , cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam, ubi major. Dico, angulum AOq , qui determinat verum corporis locum p , æqualem esse angulo $AOQ + E$.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam si arcus At sit mensura anguli N , dato tempore proportionalis, erit area elliptica ASp , ut arcus At . Sed ex ostenso theoremate eadem area elliptica ASp est, ut differentia inter arcum Aq , & rectam Si . Itaque erit recta Si æqualis arcui tq . Eodem ratiocinio ostendetur, quod si arcus AT sit mensura anguli proportionalis tempore, quo corpus descripsit arcum AP , recta SI æqualis sit arcui TQ . Quare differentia inter rectas SI , Si æqualis erit differentię inter arcus TQ , tq , sive etiam inter arcus Tt , Qq ; hoc est, posito, quod angulus AOQ sit recto minor, quemadmodum eum jam schema exhibet, erit $Si - SI$, idest $li = Qq - Tt$.

Et quoniam ex constructione habetur; tum angulus B ad angulum graduum $57, 29578$, quem arcus radio æqualis subten-
dit, ut est OS ad OA ; tum angulus D ad angulum B , ut est sinus anguli AOQ ad radium, hoc est ut QR ad OQ , sive etiam ut SI ad OS : assumpto in circumferentiâ circuli AQR arcu æquali radio OA pro mensurâ anguli graduum $57, 29578$; erit ar-

cus ejusdem circumferentiæ æqualis rectæ OS mensura anguli B , & arcus ejusdem adhuc circumferentiæ æqualis rectæ SI mensura anguli D . Est autem in circumferentiâ AQB , TQ arcus æqualis rectæ SI . Itaque erit arcus TQ mensura anguli D ; & propterea mensura anguli $N - AOQ \div D$ erit arcus $At - AQ \div TQ$, hoc est arcus Tt.

Fiat porro, ut OS ad OA , ita OA ad OG : adeo, ut existente OA radio, sit OG longitudo L , & RG eadem longitudo L , cosinu anguli AOQ diminuta , ubi angulus iste recto minor est , aucta , ubi major . Quia igitur OS est ad OA , ut OA ad OG , & OS est ad OA , sive OQ , ut OI , sive Ol ad OR ; erit ex æquali , ut Ol ad OR , ita OA , sive OQ ad OG ; atque adeo permutando , ut Ol ad OQ , ita OR ad OG . Sed , propter sectores similes Oli , OQq , Ol est ad OQ , ut li , sive Qq — Tt ad Qq . Quare erit rursus ex æquali , ut OR ad OG , ita Qq — Tt ad Qq ; & propterea OG erit ad RG , ut Qq ad Tt .

Jam ex constructione angulus E est ad angulum $N - AOQ \div D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L diminutam (vel auctam) cosinu anguli AOQ , hoc est ut OG ad RG . Itaque erit ex æquali , ut angulus E ad angulum $N - AOQ \div D$, ita Qq ad Tt . Ostensum est autem , arcum Tt mensura

mensuram esse anguli $N - A O Q + D$. Quare erit arcus Qq mensura anguli E . Sed arcus Qq metitur quoque angulum $Q O q$. Erit igitur angulus E æqualis angulo $Q O q$; & propterea totus angulus $A O q$ æqualis erit angulo $A O Q + E$.

Verum notare hoc loco oportet, angulum E æqualem oriri angulo $Q O q$, quum locus P est aded proximus vero corporis loco p , ut pro differentiâ rectarum SI , Si sumi possit *li*, quemadmodum jam à nobis in demonstratione factum est. Sed siquidem non tanta sit proximitas eorum locorum, tunc angulus E minor semper orietur angulo $Q O q$; atque aded, ut anguli $A O q$ verus valor inveniat, instituenda erit iterum, atque iterum operatio, capiendo semper pro angulo $A O Q$ ipsum angulum $A O Q$ unâ cum illo, qui in antecedenti operatione lucratus est.

Nimirum, quemadmodum primâ vice accipitur, & angulus D ad angulum B , ut est sinus anguli $A O Q$ ad radium, & angulus E ad angulum $N - A O Q + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli $A O Q$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam, ubi major. Ita secundâ vice capiendus erit, tum angulus F ad angulum B , ut est sinus anguli $A O Q + E$ ad radium; tum angulus G ad angulum $N - A O Q - E + F$, ut est longitudo L ad

L ad longitudinem eandem L cosinu anguli $AOQ + E$ diminutam, vel auctam, prout angulus iste recto minor est, vel major. Et tertiâ vice, tum angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; tum angulus I ad angulum N — $AOQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem L cosinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam, ubi major. Atque ita in infinitum. Hac enim ratione fiet angulus AOQ æqualis angulo $AOQ + E + G + I + \&c.$

Præterea notare etiam hoc loco oportet, fieri quandoque posse, ut angulus N — $AOQ + D$ sit negativus, nimirum, quum locus P est ultra verum corporis locum p, ita ut, & AP major sit, quàm Ap; & AQ major, quàm Aq. Id itaque quum accidit, angulus E non quidem addendus, sed demendus est ex angulo AOQ , hoc est signum positivum ipsius E ubique mutandum est in negativum, & signum negativum vicissim in positivum. Idem autem intelligi debet de signis angulorum G, & I, ubi anguli N — $AOQ - E + F$, & N — $AOQ - E - G + H$ negativi prodeunt.

Denique notabimus hoc loco, quod si excentricitas ellipseos, in qua corpus revolvitur, augeatur in infinitum: ita, ut um-

bi-

bilico altero in infinitum abeunte, vertatur ellipsis ipsa in parabolam; tunc problema, de quo agimus, evadet geometricum, quandoquidem area parabolica, per rectam ex umbilico ductam abscindenda, ex dato tempore, cui proportionalis esse debet, prodit per æquationem finitam. Sit enim parabola AP, cujus vertex principalis punctum A, umbilicus punctum S; & ducenda sit recta SP, abscindens aream parabolicam ASP æqualem dato rectilineo.

FIG.

125.

Ex puncto P ad axim demittatur ordinatum applicata PO, ponaturque $AS = a$, $AR = x$, & $PO = y$. Quia igitur spatium parabolicum APO, ex Archimedeâ parabolæ dimensione, duas tertias partes continet rectanguli circumscripti xy , erit sextuplum ejusdem spatii parabolici $AP O = 4xy$. Sed spatium istud parabolicum est summa, vel differentia areæ ASP, & trianguli PSO; summa inquam, quum punctum O cadit infra umbilicum S; differentia verò, quum cadit supra. Quare, si vocetur $4am$ rectilineum, cui area parabolica ASP æqualis esse debet, quia duplum trianguli PSO in primo casu est $xy - ay$, in secundo casu est $ay - xy$; erit in omni casu $24am \mp 3xy - 3ay = 4xy$, hoc est $24am - 3ay = xy$, sive etiam, multiplicatis terminis omnibus per $4a$, $96aam - 12aay = 4axy$. Est autem, ob naturam pa-

parabolæ, $4ax = yy$. Itaque, factâ substitutione, erit $96aam - 12aay = y^3$, hoc est $y^3 + 12aay - 96aam = 0$.

Cubicam istam æquationem Cartesianâ methodo facile erit geometricè construere. Capiatur enim in axe parabolæ, tum portio AC æqualis dimidio lateris recti, tum portio CG retrò versus verticem æqualis ei, quod oritur, dividendo quantitatem cognitâ tertii termini $12aa$ per duplum ejusdem lateris recti. Porro ex puncto G erigatur perpendiculum GH æquale ei, quod producit, dividendo ultimum terminum $96aam$ per duplum quadrati, quod fit ex eodem latere recto; & circulus, qui describitur centro H, intervallo HA, secabit parabolam in puncto quæsito P.

Hæc autem constructio coincidit cū illâ, quam affert Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis, & in qua punctum G bisecat AS, estque $GH = 3m$. Nam, quum latus rectum parabolæ sit $4a$, hoc est quadruplum ipsius AS, erit $AC = 2a$, adedque $AS = SC$. Quumque quotiens, qui oritur, divi-

dendo $12aa$ per $8a$ sit $\frac{3}{2}a$; erit $CG = \frac{3}{2}a$,

atque adeo punctum G bisecabit ipsam AS. Et denique, quia id, quod producit, dividendo $96aam$ per $32a^2$, est $3m$; erit GH

= 3m, prorsus ut in constructione Newtonianâ. Unde cui nota est Cartesiana æquationes construendi methodus, is in constructione Newtonianâ nullam difficultatem inveniet.

C A P. V.

De motu æquabili corporum in orbibus circularibus.

V Idimus superiùs, quod si corpus gyretur in circumferentiâ circuli, vi tendente ad ipsum circuli centrum, ita ut motus ejus, propter æquales sectores, quos æqualibus temporibus describit, sit æquabilis, ac uniformis; vis, qua illud urgetur, sit itidem constans, & æquabilis. Nec equidem res aliter esse potest, quia quotiescumque vis ad centrum circuli dirigitur, corpus in omni loco eandem habet distantiam à centro virium; nec proinde aliquid in causâ esse potest, ut majori vi urgeatur in uno loco, quàm in alio.

Verum etsi constans, & æquabilis sit vis, qua urgetur corpus, motum æquabiliter in circumferentiâ circuli, non hinc tamen putandum est, æquales inter se esse vires, quibus urgentur duo corpora, diversas circumlorum circumferentias æquabili motu describentia. Possunt siquidem esse in aliquo casu

casu æquales ; sed nihil vetat , quin interdum servant inter se aliam rationem , quàm æqualitatis.

Id igitur ut plenius constet , ostendendum est Nobis hoc theorema , quod corporum , quæ diversos circulos æquabili motu describunt , vires centripetæ sint inter se , ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata , applicata ad radios circulorum ; hoc est in ratione compositâ ex duplicatâ arcuum , quos simul describunt , directâ , & ex simplici radiorum , aut etiam diametrorum inversâ .

Neque verò difficile erit theorema istud ostendere . Sunt enim vires istæ , ut arcuum æqualibus temporibus quamminimis descriptorum sinus versi , utpote dimetientes translationes corporum de tangentibus rectilineis in orbes circulares ; addeòque , ut quadrata arcuum eorundem , ad diametros circulorum applicata , quum ii arcus non differant à suis chordis . Jam verò , propter motus æquabilitatem , sunt iidem arcus , ut arcus , temporibus quibuscvis æqualibus descripti , & diametri sunt , ut eorum radii . Quare eadem vires erunt inter se , ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata , applicata ad radios circulorum .

Et quoniam in motu æquabili velocitates

tes mobilium sunt, ut spatia, quæ æqualibus temporibus describuntur; proinde arcus illi simul descripti erunt, ut velocitates corporum. Unde eorum vires centripetæ erunt etiam, ut velocitatum quadrata, applicata ad radios circulorum; hoc est in ratione compositâ ex duplicatâ velocitatum directâ, & simplici radiorum inversâ.

Quin etiam, quia velocitates sunt, ut circumferentiæ, sive radii directè, & tempora periodica inversè; eadem vires corporum centripetæ, quæ sunt, ut quadrata velocitatum applicata ad radios circulorum, erunt quoque reciprocè, ut quadrata temporum periodicorum, applicata ad eosdem radios; hoc est in ratione compositâ ex simplici radiorum directâ, & duplicatâ temporum periodicorum inversâ.

Hinc, si vires corporum centripetæ, sive gravitatis vocentur G , & g ; eorum velocitates V , & v ; tempora periodica T , & t ; ac denique radii circulorum R , & r ; habe-

bitur, ut G ad g , ita $\frac{VV}{R}$ ad $\frac{vv}{r}$, & ita $\frac{TT}{R}$ ad $\frac{tt}{r}$.

Unde, quum sit etiam, ob legem

motus æquabilis, ut V ad v , ita $\frac{R}{T}$ ad $\frac{r}{t}$;

facile nobis erit, tribus hisce analogiis defini-

nire relationem, quam habent inter se vires corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt.

Nimirum primò, si tempora periodica T , & t æquantur: & propterea velocitates V , & v sint, ut radii R , & r ; erunt etiam vires centripetæ gravitatis G , & g , ut radii R , & r . Et contra, si vires G , & g sint in ratione radiorum R , & r ; tempora periodica T , & t æquabuntur inter se; atque aded velocitates V , & v erunt, ut radii R , & r .

Secundò, si tempora periodica T , & t sint in radiorum R , & r ratione subduplicatâ; ita, ut velocitates V , & v sint in eâdem radiorum subduplicatâ ratione; æquales erunt inter se vires centripetæ G , & g . Et vicissim, si vires G , & g sint æquales; erunt in subduplicatâ ratione radiorum R , & r , tum tempora periodica T , & t , tum velocitates V , & v .

Tertiò, si tempora periodica T , & t sint, ut radii R , & r : ita, ut æquales inter se sint velocitates V , & v ; vires centripetæ G , & g erunt reciprocè, ut radii R , & r . Et è converso, si vires G , & g sint in reciproca ratione radiorum R , & r ; tempora periodica T , & t erunt, ut ipsi radii R , & r ; velocitates autem V , & v æquales erunt inter se.

Quartò si tempora periodica T , & t sint
in

in ratione sesquiplicatâ radiorum R , & r ,
 (qui casus obtinet in corporibus cœlesti-
 bus:) & propterea velocitates V , & u reci-
 procè in ratione eorundem radiorum sub-
 duplicatâ; erunt vires gravitatis G , & g
 reciprocè, ut quadrata radiorum R , & r .
 Et vicissim, si vires G , & g servant inter se
 duplicatam rationem radiorum R , & r ;
 erunt in eorundem radiorum ratione ses-
 quiplicatâ directâ tempora periodica T , &
 t ; & ratione subduplicatâ reciproca veloci-
 tates V , & u .

Generaliter autem, si tempora periodica
 T , & t sint, ut radiorum potestates quæli-
 bet R^n , & r^n : & propterea velocitates V ,
 & u reciprocè, ut $R^n - 1$, & $r^n - 1$; erunt
 vires G , & g reciprocè, ut eorundem radio-
 rum potestates $R^{2n} - 1$, & $r^{2n} - 1$. Et
 contra, si vires sint, ut istæ radiorum potesta-
 tes reciprocè; erunt in alia ratione, tam
 tempora periodica, quàm velocitates.

Patet igitur corporum, diversos circulos
 æquabili motu describentium, vires centri-
 petas gravitatis tunc demum æquales esse
 inter se, quum tempora periodica sunt in
 ratione subduplicatâ radiorum, adedque ve-
 locitates, ut ipsa tempora. Verum, si tempo-
 ra periodica aliam inter se mutuò servant
 rationem; tunc & ipsæ vires aliam inter se
 rationem, quàm æqualitatis, obtinebunt.

FIG.
126.

Sed circa motum æquabilem corporum in orbibus circularibus plura alia occurrunt observatu digna, quæ breviter hoc capite prosequemur. Itaque sit ABC circuli circumferentia, quam circa centrum virium S describit corpus motu æquabili. Cōtingat eam in puncto aliquo A recta AF, & sumpto arcu indefinitè parvo AB, ducatur BD ipsi AS parallela, sive etiam compleatur rectangulum ADBE; jamque spatium, quod describitur vi centripetâ, interea ac corpus fertur per arculum AB, est AE, sive DB.

Hinc autem facile erit ostendere elegans istud theorema, quod arcus, quem corpus in circulo, datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo, tempore quovis describit, medius sit proportionalis inter diametrum circuli, & spatium, quod idem corpus eodem tempore datâ illâ vi, uniformiter applicatâ, cadendo percurrit. Dividatur etenim tempus datum, quod voco t , in plures particulas quamminimas, & æquales. Et siquidem AB sit arcus, qui in primâ istius temporis particulâ describitur; erit AE, sive DB spatium, quod urgente vi centripetâ eâdem temporis particulâ percurritur.

Jam, propter circulum, AC, AB, BD sunt continuè proportionales. Itaque, quum in continuâ analogiâ sint etiam $1, t, tt$; erunt,

erunt, factâ mutuâ terminorum multiplicatione, continuè itidem proportionales $AC, tAB, ttBD$. Est autem tAB arcus, quem corpus motu æquabili describit in circulo tempore t ; & $ttBD$ spatium, quod percurritur eodem tempore t datâ vi centripetâ uniformiter applicata: nam, sicuti in motu æquabili spatia sunt in ratione temporum simplici; ita in motu uniformiter accelerato eadem spatia sunt in ratione temporum duplicatâ. Quare arcus datâ vi centripetâ æquabiliter in circulo descriptus erit medius proportionalis inter diametrum circuli, & spatium, quod eodem tempore eâdem illâ vi uniformiter applicatâ percurritur.

Hujus theorematis beneficio facile modò erit, datâ vi centripetâ, invenire altitudinem AO , unde descendere debet grave corpus, quo vi illâ uniformiter agente talem in A acquirat velocitatem, ut possit eâ velocitate describere circumferentiam circuli ABC . Nam, quum motus in circulo sit æquabilis, & descensus per AO sit motus æquabiliter acceleratus; per ea, quæ superius ostensa sunt, liquet corpus æquali tempore in circulo latum describere arcum duplum ipsius AO . Est autem, per ostensum theorema, arcus iste medius proportionalis inter AC , & AO . Itaque erit ut AC ad

 Kk

3

 $2AO,$

$2AO$, ita $2AO$ ad AO ; & propterea erit AO æqualis quartæ parti diametri AC .

Itaque velocitas, quæ requiritur ad describendam circuli circumferentiam æquali motu datâ vi centripetâ, tanta esse debet, quanta acquiritur, cadendo per altitudinem æqualem quartæ parti diametri, vi illâ centripetâ uniformiter in corpus agente. Quocirca, si vis gravitatis in corporibus terrestribus constans sit, & uniformis, quemadmodum jam à Galilæo suppositum fuit, & multiplici experienciâ comprobatum; describet grave aliquod corpus circa telluris centrum propriâ suâ gravitate datam circuli circumferentiam, si utiq; in motu suo circulari tantam habuerit velocitatem, quantum sibi comparasset, siquidem descendisset proprio pondere per altitudinem, quæ adæquet semissem distantiae corporis à centro telluris, ad quod vis ejus gravitatis dirigetur.

Huic eidem theoremati innititur calculus, quo invenit Newtonus, lunam spatio unius minuti primi describere vi suâ pedes Parisienses quindecim cum unâ parte duodecimâ; atque aded vim ipsam, qua luna revolvitur circa terram, non differre à vi gravitatis corporum terrestriû. Nam, assumptâ lunæ à terrâ distantia semidiametrorum terrestrium sexaginta, quia lunaris periodus

respectu fixarum perficitur spatium dierum viginti septem, horarum quinque, & quadraginta trium minutorum; terræque ambitus est pedum parisiensium 123249600, uti à Piccarto mensuratore Gallo est definitum; dabitur secundum hæc elementa arcus, quem luna in orbe suo, quem circularē assumimus, describit spatium unius minuti primi. Atqui inito calculo medius proportionalis inter arcum istum, & diametrum orbitæ lunaris, cui æquale esse debet spatium vi lunæ describendum eodem tempore minuti primi, invenietur pedum parisiensium quindecim cum unâ parte duodecimâ.

Præterea ex eo, quod effectus vis centripetæ in quolibet orbe sit translatio corporis de tangente in orbem, comparari potest vis centripeta, quam corpus habet in quolibet suo orbitæ loco, ad vim centripetam, quam haberet, si utique eodem in loco, eâdem velocitate, æquabiliter in circulo æquicurvato revolveretur. Revolvatur etenim corpus aliquod in orbe APQ vi tendente ad centrum S , sitque in loco P recta Pn radius curvaturæ. Tangat porro in P orbem illum recta PR , ad quam ex centro virium S demittatur perpendiculum SY . Dico, quod si PS exponat vim centripetam corporis tendentem ad S , exponi debeat per SY vis centripeta tendens ad n , qua urgente idem cor-

FIG.
117.

pus eâdem velocitate describet circulum æquicurvum orbi in loco P.

Capiatur namque in orbe APQ portio indefinitè parva PQ, quæ nempe communis sit tam orbi, quàm circulo æquicurvo. Et quoniam circulus iste æquicurvus describitur eâdem velocitate, quam corpus in orbe APQ motum habet in P; percurreretur propterea arcus ille PQ eodem tempore quam minimo, five corpus gyretur in orbe APQ, five etiam in circulo æquicurvo. Jam verò ducta recta Qx tangenti PR parallelâ, quæ conveniat cum PS in puncto x, & cum Px in puncto n, est Px effectus vis centripetæ tendentis ad S, & Pn effectus vis centripetæ tendentis ad n. Itaque, quum effectus isti à suis causis in eodem tempore producantur, erit ut vis tendens ad S ad vim tendentem ad n, ita Px ad Pn. Est autem, propter triangula similia Px n, PSY, ut Px ad Pn, ita PS ad SY. Quare erit ex æquali, ut vis tendens ad S ad vim tendentem ad n, ita PS ad SY; & propterea exponente PS vim, quæ tendit ad S, exponet SY vim, quæ tendit ad n.

Atque hinc modò haud difficile quoque erit, rationem determinare, quam habet velocitas corporis in quolibet suo orbitæ loco, ad velocitatem, quam utique haberet, si circa idem centrum virium, eâdem vi centri-

tripetâ , in eâdem distantîâ , circulariter moveretur . Moveatur etenim corpus aliquod in orbe APQ vi centripetâ tendente ad S , & velocitas ejus in loco P dicatur V . Vocetur porro u velocitas , qua corpus urgente eâdem vi centripetâ , in eâdem distantîâ PS , moveri potest æquabiliter in circulo . Et iisdem ut supra manentibus , dico fore , ut VV ad uu , ita rectangulum ex Pu in SY ad PS quadratum .

Constat namque ex ostenso theoremate , quod si PS exponat vim centripetam tendentem ad S , exponi debeat per SY vis centripeta tendens ad u , qua urgente describi potest eâdem velocitate V circulus , cujus radius sit recta Pu . Sed ex iis , quæ initio hujus capituli demonstrata sunt , notum est , corporum diversos circulos describentium vires centripetas esse in ratione compositâ ex duplicatâ velocitatum directâ , & ex simplici radiorum inversâ . Quare PS ad SY habebit rationem compositam ex uu ad VV , & ex Pu ad PS . Subducatur utrinque ratio , quam habet Pu ad PS ; & erit , ut PS quadratum ad rectangulum ex Pu in SY . ita uu ad VV ; hoc est invertendo , ut VV ad uu , ita rectangulum ex Pu in SY ad PS quadratum .

Ex eo autem , quod sit , ut VV ad uu , ita rectangulum ex Pu in SY ad PS quadratum ;

perspicuū est, quod si corpus aliquod exeat ē loco P secundū rectam PR datā velocitate V, idemque urgeatur vi centripetā tendente ad punctum S, cujus quantitas absoluta nota sit, semper determinari possit radius curvaturæ, quam orbita, à corpore describenda, cogente vi illā centripetā, habet in loco P. Nam datā quantitate absolutā vis centripetæ in loco P, & distantiā à centro virium PS, dabitur etiam velocitas u ; quum per superius ostensa ea sit, quæ acquiritur cadendo per altitudinem æqualem dimidio ipsius PS, vi illā centripetā uniformiter in corpus agente. Unde, si fiat, ut u ad VV, ita quotiens, qui oritur, dividendo PS quadratum per SY, ad quartam, habebitur radius curvaturæ P π .

Itaque velocitas corporis in quolibet suæ orbitæ loco P est ad velocitatem, qua circumrifer revolveretur in eādē à centro virium distantiā PS, in subduplicatā ratione ejus, quam habet rectangulum ex P π in SY ad PS quadratum. Ex quo patet, quod si punctum P fuerit orbitæ vertex principalis, ita ut coincidat PS cum SY, tunc eædem velocitates erunt inter se in subduplicatā ratione rectarum P π , PS. Unde, si porro curva APQ sit una ex sectionibus conicis, fiet P π æqualis dimidio lateris recti principalis; & propterea velocitas corporis in vertice principali

pali conicæ sectionis erit ad velocitatem corporis, in eâdem distantia circulum describentis, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet dimidium lateris recti principalis ad distantiam illam, sive etiam totum latus rectum ad eandem distantiam duplicatam.

Quoniam autem terminos rationis, quam habet velocitas corporis in quolibet suæ orbitæ loco P ad velocitatem corporis, circulum describentis in eâdem distantia PS , ingreditur radius curvaturæ $P\pi$; non abs re erit hoc loco formulam aliquam generalem afferre, qua inveniri possit radius curvaturæ in curvis radialibus, hoc est habentibus ordinatas ad commune aliquod punctum convergentes, velut ad S . Et quoniam in iisdem terminis illius rationis reperitur, tum ordinata convergens PS , tum perpendiculum ad tangentem demissum SY ; optandum esset, ut in istiusmodi formulâ valores ipsarum PS , SY , earumdemque elementa, sive differentiæ dumtaxat continerentur.

Neque verò difficile erit pro determinando radio curvaturæ talem formulam invenire. Nam, quum angulus $P\pi Q$ æqualis sit angulo QPR , productâ PQ , usque donec conveniat cum perpendiculo SY in puncto y , similes erunt sectores πPQ , PYy ; eritque aded, ut $P\pi$ ad PQ , ita PY ad Yy . Est autem, ob similia triangula PQT , PSY , ut

PQ

PQ ad PT, ita PS ad PY. Quare erit ex æquali perturbando, ut P π ad PT, ita PS ad Yy: & propterea radius curvaturæ P π invenietur, si factum ex ordinatâ convergente PS in suam differentiam PT dividatur per Yy, quæ est differentia perpendiculi SY; hoc est positis PS = r , & SY = p , si factum ex r in dr dividatur per dp .

Hoc igitur theoremate, sive formulâ generali determinari poterit radius curvaturæ in curvis radialibus. Ita, si curva APQ sit spiralis nautica, sive logarithmica, quæ secat ordinatas omnes convergentes in dato angulo; quia datur angulus SPY, dabitur ratio, quam habet PS ad SY. Quocirca, si ratio ista fuerit, ut a ad b , iisdem ut supra manentibus, erit ut r ad p , ita a ad b ; atque adeo curvæ æquatio erit $ap = br$. Unde quum, sumptis differentiis, sit $adp = bdr$; erit dp

$$= \frac{a}{b} \frac{rdr}{dp} : \text{ \& propterea fiet radius curvaturæ } P\pi \left(= \frac{rdr}{dp} \right) = \frac{ardr}{bdr}, \text{ hoc est } = \frac{ar}{b}.$$

quo facile constabit, spiralis nauticæ evolutam esse eandem spiralem in aliâ positione.

Sed nolim hîc silentio præterire, ex hoc theoremate aliam nobis subnasci formulam generalem pro determinandâ vi centripetâ, quæ requiritur, ut corpus revolvî possit in

orbe dato . Est enim ob quartam earum formularum , quas attulimus capite tertio, vis centripeta in loco P , ut distantia PS directè , radius curvaturæ $P\pi$ inversè , & cubus perpendiculari SY etiam inversè . Quocirca , quum radius curvaturæ $P\pi$ prodeat, dividendo factum ex PS in PT per Yy ; eadem vis centripeta in loco P erit , ut Yy directè, PT inversè, & cubus ex SY etiam inversè ; hoc est , iisdem ut supra symbolis manentibus , reciprocè ut quotiens , qui oritur , dividendo $p^3 dr$ per dp .

Ult , si curva APQ sit ellipsis , cujus S umbilicus unus , & H umbilicus alter ; quia constat ex conicis , rectas PS , PH æquales cum tangente PR angulos constituisse , itemque factum ex perpendicularis , quæ ex umbilicis S , & H ad eandem tangentem demittuntur, æquale esse quadrato semiaxis conjugati : propterea , si manente $PS = r$, & $SY = p$, vocetur a axis major ellipsis , & $4c$ ejus latus rectum , fiet curvæ æquatio $app - rpp = acr$. Unde , quia divisâ utraq; parte æquationis per rpp , iisdemque differentiatis , & differentiis debitè reductis , habetur $2crrdp = p^3 dr$; erit $2crr$ quotiens , qui oritur , dividendo $p^3 dr$ per dp ; atque aded vis centripetâ in loco P erit reciprocè, ut $2crr$; hoc est, neglectâ constante $2c$, reciprocè , ut rr , sive PS quadratum.

Si

Si manente umbilico S, migret umbilicus alter H ad partem oppositam respectu ipsius S; ellipsis vertetur in hyperbolam, & curvæ æquatio erit $app + rpp = acr$. Sed, si alter ille umbilicus H abeat in infinitum, tunc ellipsis mutabitur in parabolam. Et, quia longitudo axis majoris a fit infinita, terminus rpp evanescit respectu alterius app ; eritque aded curvæ æquatio $app = acr$, hoc est $pp = cr$. Verùm in omni casu, non secus ac superius ostensum est, reperietur vis centripeta in puncto P reciprocè proportionalis quadrato distantiae PS.

Nec reticebimus hoc loco id, quod nuper accepimus ex Acutissimo Mathematico P. Cœlestino Rollio, qui in Pisano Lyceo publicè Physicam profitetur; alterius hujus formulæ beneficio, nempe quod vis cētripeta sit reciprocè, ut quotiens, qui oritur, dividendo $p^3 dr$ per dp , nullo negotio ex datâ lege vis centripetæ determinari posse relationem, quam habet r ad p , hoc est PS ad SY; ac proinde per methodum tangentium inversam exhiberi curvam, quæ datâ vi centripetâ describi possit. Ita, si ponamus vim centripetam esse reciprocè, ut quadratum distantiae PS; quotiens, qui oritur, dividendo $p^3 dr$ per dp erit, ut rr . Unde, si quantitas ac talis sit, ut habeatur in aliquo casu $p^3 dr = acrrdp$, obtinebit æquatio ista in omni casu

casu, eritque semper $p^3 dr = 2crrdp$.

Jam, divisâ æquationis hujus utrâq; parte

per $p^3 r^2$, iisdemque integratis, erit $\frac{c}{p} = \frac{1}{r}$

—, sive etiam $\frac{c}{p} + \frac{1}{r} = \frac{c}{p}$, addendo nem-

pe, ut moris est, integralibus quantitatem constantem. Unde, quum curvæ æquatio fiat $app + rpp = acr$, patet curvam esse ellipticam, quum quantitas illa constans est negativa; esse verò hyperbolam, quum eadem quantitas constans est positiva; & denique esse parabolam, si constans illa quantitas evanescat: id quod accidit, quum valor ipsius a fit infinitus.

Similiter, si vis centripeta fuerit, ut cubus distantiae PS, quotiens, qui oritur, dividendo $p^3 dr$ per dp erit, ut r^3 . Unde, si quantitates a , & c tales sint, ut aliquo casu habeatur $aap^3 dr = ccr^3 dp$, obtinebit æquatio ista in omni casu, eritque semper $aap^3 dr = ccr^3 dp$ curvæ differentialis æquatio. Quocirca, quia divisâ æquationis hujus utrâque parte per $p^3 r^3$, iisdemque integratis cum additione alicujus constantis,

habetur $\frac{aa}{pp} + \frac{m}{n} = \frac{cc}{rr}$, hoc est $aanrr + mpprr$

$= ccnpp$; patet, huic hypothesei gravitatis

tres

tres etiam curvas competere; unam nempe, quum quantitas illa constans est positiva; alteram, quum est negativa; & tertiã, quum evanescit: quo casu curva est spiralis nautica, quia ejus æquatio fit $ar = cp$.

Sed ut ad id, unde discessimus, iterum revertamur, vidimus velocitatem corporis in quolibet suæ orbitæ loco P esse ad velocitatem, qua circulariter revolveretur in eadem distantia PS, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet rectangulum ex Pn in SY ad PS quadratum. Itaque, quum radius curvaturæ Pn æqualis sit plano ex PS in PT, applicato ad Yy; erunt eadem velocitates inter se in subduplicatâ ratione ejus, quam habet rectangulum ex SY in PT ad rectangulum ex PS in Yy: proindeque manentibus semper iisdem symbolis, si velocitates illæ dicantur V, & u; erit, ut VV ad uu, ita pdr ad rdp: & propterea ex datâ relatione, quam habet r ad p, dabitur ratio inter V, & u.

Ut si ponamus, vim centripetam gravitatis esse reciprocè proportionalem quadrato distantia PS, quotiens, qui oritur, dividendo $p^3 dr$ per dp , erit ut rr ; adeoque si quantitas $2c$ talis sit, ut in aliquo casu habeatur $p^3 dr = 2crrdp$, obtinebit æquatio ista in omni casu, eritque semper $p^3 dr = 2crrdp$ curvæ differentialis æquatio. Quo-

cir-

circa, quum sit, ut pdr ad rdp , ita $2cr$ ad pp ; erit ex æquali, ut VV ad uu , ita $2cr$ ad pp ; adeòque integratâ curvæ æquatione, facile erit, determinare rationem, quam habet V ad u .

Nimirum, si æquatio illa integrata det $pp = cr$, ita ut curva ipsa sit parabola; erit $2cr$ ad pp , ut 2 ad 1 : proindeque V ad u erit, ut $\sqrt{2}$ ad 1 . Quod, si autem integrale ejus æquationis fuerit $app - rpp = acr$, ita ut curva ipsa sit elliptis; erit $2cr$ ad pp , ut $2a - 2r$ ad a , hoc est in minori ratione, quàm 2 ad 1 : quare V ad u minorem quoque habebit rationem, quàm $\sqrt{2}$ ad 1 . Et denique, si eadem illa æquatio integrata det $app + rpp = acr$, ita ut curva ipsa sit hyperbola; erit $2cr$ ad pp , ut $2a + 2r$ ad a , hoc est in majori ratione, quàm 2 ad 1 : & propterea V ad u majorem quoque habebit rationem, quàm $\sqrt{2}$ ad 1 .

Ex his itaque consequitur, quod si corpus moveatur in sectione aliquâ conicâ APQ vi centripetâ tendente ad umbilicum S , velocitas ejus in quolibet orbitæ loco P sit ad velocitatem corporis, describentis circulum in eâdem à centro virium distantia PS , ut $\sqrt{2}$ ad 1 , si sectio conica fuerit parabola; in minori ratione, quàm $\sqrt{2}$ ad 1 , si sectio fuerit ellipsis; & in ratione majori, quàm $\sqrt{2}$ ad 1 , si sectio fuerit hy-

hyperbola . Sed , iisdem vestigiis insistendo , invenietur , quod si corpus in spirali nauticâ deferatur , ejus velocitas in quolibet loco spiralis æqualis sit velocitati corporis in eâdem distantia circulum describentis .

Quoniam autem , quum vis centripeta est reciprocè preportionalis quadrato distantia , velocitates corporum , diversos circulos describentium sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum ; erit velocitas corporis , gyrantis circulariter in datâ qualibet distantia , ad velocitatem corporis gyrantis circulariter in distantia dimidiatâ , ut 1 ad $\sqrt{2}$. Ex quo facile colligi potest , quod in parabolâ velocitas corporis ubique æqualis sit velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam , in ellipsi minor , in hyperbolâ major .

Quaecumque verò sit sectio conica , ad quam refertur æquatio differentialis $p^3dr = 2crrdp$, illud ex iis , quæ paulò ante dicta sunt , perspicuum est , quantitatem $2c$ esse dimidium lateris recti principalis ipsius conicæ sectionis . Unde , quum sit , ut VV ad uu , ita $2cr$ ad pp ; patet , velocitatem corporis , gyrantis in qualibet sectione conicâ , vi ad umbilicum tendente , esse ad velocitatem corporis , gyrantis in circulo in eâdem à centro virium distantia , ut est media proportionalis inter distantiam illam communem ,

nem,

nem, & semissem lateris recti principalis ad perpendiculum, quod ex centro virium in tangentem sectionis demittitur.

Patet etiam, quod si velocitas corporis, gyrantis circulariter circa centrum virium S in distantia, quæ adæquet dimidium lateris recti principalis, hoc est $2c$, dicatur W ; sit, ut V ad W , ita $2c$ ad p . Nam, ob vim centripetam, reciproçè proportionalem quadrato distantia, erit ut u ad W , ita $\sqrt{2c}$ ad $\sqrt{r}$, sive etiam, ita $2c$ ad $\sqrt{2cr}$. Est autem, ut V ad u , ita $\sqrt{2cr}$ ad p . Quare erit ex æquo perturbando, ut V ad W , ita $2c$ ad p ; hoc est, ut velocitas corporis, gyrantis in sectione conicâ, ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in distantia, quæ adæquet semissem lateris recti principalis, ut est distantia ista ad perpendiculum, ex umbilico in tangentem sectionis demissum.

Ex quo liquet ulterius, velocitatem corporis, quod movetur in sectione conicâ, vi ad umbilicum tendente, æstimari posse ubique per velocitatem corporis, gyrantis circulariter in distantia, semissem lateris recti principalis adæquante, ductam in exponentem rationis, quam habet ipsum latus rectum principale ad perpendiculũ, ex umbilico in tangentem sectionis demissum. Unde, quia velocitas corporis, gyrantis in circulo, cujus radius semissem lateris recti principa-

lis adæquat, ob vim centripetam, reciprocè proportionalem quadrato distantiae, exponi potest reciprocè per radicem quadratam ejusdem lateris recti; fiet eadem velocitas corporis, in sectione conicâ moti, ut radix quadrata lateris recti principalis directè, & perpendiculum ex umbilico in tangentem sectionis demissum inversè.

Sunt igitur velocitates corporum, quæ in sectionibus conicis vi ad umbilicum tendente revolvuntur, in ratione compositâ ex subduplicatâ laterum rectorum principalium directâ, & ex simplici perpendiculorum inversâ; aded, ut subductâ perpendiculorum ratione simplici, fient latera recta principalia in ratione compositâ ex duplicatâ perpendiculorum, & duplicatâ velocitatum. Ex quo sequitur, velocitates corporum in maximis, & minimis ab umbilico communi distantibus esse in ratione compositâ ex subduplicatâ laterum rectorum principalium directâ, & ex simplici distantiarum inversâ; quandoquidem perpendicula jam sunt ipsæ distantiae. Nec reticebimus, quod in eadem sectione conicâ, vel etiam in sectionibus conicis diversis, quarum latera principalia sunt æqualia, velocitas corporis ubique sit reciprocè, ut perpendiculum, demissum ab umbilico in tangentem sectionis.

Sed circa rationem, quæ est inter velocitatem corporis, gyrantis in sectione conicâ, vi ad umbilicum unum tendente, & velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eâdem à centro virium distantia, illud etiam theorema præteriri non debet, quod ratio ista in ellipsi, & hyperbolâ æqualis sit rationi subduplicatæ, quam habet distantia corporis ab umbilico altero duplicata ad figuræ axem transversum. Ut enim superius vidimus, hæc ratio in ellipsi est, ut $\sqrt{2a - 2r}$ ad $\sqrt{a}$; in hyperbolâ verò, ut $\sqrt{2a + 2r}$ ad $\sqrt{a}$; & profectò, sicuti tam in ellipsi, quàm in hyperbolâ a designat longitudinem axis transversi; ita, per vulgatam umbilicorum proprietatem, distantia corporis ab umbilico altero duplicata in ellipsi est $2a - 2r$, in hyperbolâ verò est $2a + 2r$.

Atque hoc theorema obtinet etiam in parabolâ, in quam utique ellipsis migrare potest, umbilico altero in infinitum abeunte. Nam, ob infinitam alterius umbilici distantiam, fit distantia corporis ab eo æqualis longitudini axis transversi; adedque velocitas corporis, gyrantis in parabolâ, vi ad umbilicum tendente, erit ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eâdem à centro virium distantia, ut radix numeri binarii ad unitatem, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1;

quod verum esse jam superius à Nobis ostensum fuit.

FIG.
127.

Hujus autem theorematis beneficio, haud difficile modò erit in hypothefi gravitatis, reciprochè proportionalis quadrato distantiae, determinare rationem, quam habet velocitas corporis rectà descendentis ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eadem à centro virium distantia. Descendat etenim corpus aliquod ad centrum virium *S* rectà per *AS*, urgente vi centripetâ, reciprochè proportionali quadrato distantiae. Dico, velocitatem corporis in loco quolibet *C* esse ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eadem à centro virium distantia *CS*, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet duplum ipsius *AC* ad *AS*, atque adeò in minori ratione, quàm $\sqrt{2}$ ad 1.

Nam, considerando rectam *ACS* velut ellipsum, cujus umbilici accefferunt ad vertices *A*, & *S*, per ostensum theorema erit velocitas corporis in quolibet loco *C* ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in distantia *CS*, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet distantia corporis ab umbilico altero duplicata ad axem transversum ellipseos. Quocirca, quum axis transversus ellipseos sit ipsa *AS*, & distantia corporis ab umbilico altero duplicata sit duplum ipsius *AC*, liquet utique propositum.

Quod,

Quod, si punctum A abeat in infinitum, ita ut corpus descendat ex infinitâ distantia, æquales fient rectæ AC , AS ; adeoque velocitas corporis in loco C erit ad velocitatem corporis gyrantis circulariter in eâdem distantia CS , ut est $\sqrt{2}$ ad 1 : id, quod exinde etiam liquere potest, quia puncto A in infinitum abeunte, recta ACS considerari debet, non tam velut ellipsis, quàm velut parabola, cujus latus rectum evanuit, umbilicusque adeò ad verticem accessit.

At verò, si punctum A abeat ad partem oppositam respectu puncti S , ad quod tendit vis centripeta, nimirum in a , ita ut corpus descendat ex distantia plusquam infinitâ; tunc velocitas corporis in loco C erit ad velocitatem corporis, quod in circulo revolvitur in eâdem distantia CS , in sua duplicatâ ratione ejus, quam habet duplum ipsius aC ad aS , atque adeò in majori ratione, quàm $\sqrt{2}$ ad 1 . Quod exinde itidem colligi potest, quia puncto A ad partem alteram abeunte, scilicet in a , recta aCS considerari debeat velut hyperbola, cujus umbilici accesserunt ad ipsos vertices S , & a .

Nec silentio præteribimus hoc loco, quod in eâdem hypothesi gravitatis, corporis ex dato loco A rectâ cadentis versus centrum virium S tempus descensus comparari possit cum

tempore, quo revolveretur circulariter circa idem centrum virium S . Describatur etenim super AS semicirculus ADS , tum factâ eâdem AS bifariam in O , & descripto centro S , intervallo SO semicirculo alio OKH , constituatur sector OSK æqualis area $ASDA$. Dico, quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore, quo uniformiter gyrando describet arcum OK .

Etenim in hac hypothefi gravitatis per ea, quæ superius ostensa sunt, tempora revolutionum in ellipsis sunt in sesquipli- catâ ratione axiû majorum; adedq; æqualia, quum ellipsium axes majores sunt æquales. Itaque, quia recta AS considerari potest ve- lut semiellipsis, cujus umbilici ad vertices accesserunt, & semicirculus OKH tamquam semiellipsis, cujus umbilici accesserunt ad centrum; erit tempus descensus per AS æ- quale tempori revolutionis per semicircu- lum OKH .

Jam verò ex superius ostensis tempus de- scensus per AS est ad tempus descensus per AC , ut semicirculus ADS ad aream $ASDA$, itemque tempus revolutionis per OKH est ad tempus revolutionis per OK , ut semicir- culus OKH ad sectorem OSK , hoc est ut semi- circulus ADS ad aream $ASDA$. Quare erit ex æquali, ut tempus descensus per AS ad tempus descensus per AC , ita tempus revo-

lutionis per OKH ad tempus revolutionis per OK : & propterea, quemadmodum tempus descensus per AS æquale est tempori revolutionis per OKH , ita erit tempus descensus per AC æquale tempori revolutionis per OK .

Hinc autem sequitur vicissim, quod si corpus descendat per AC eodem tempore, quo aliud uniformiter revolveretur per OK , sector OSK æqualis sit area $ASDA$; pariterq; quod si idem corpus velocitate acquisitâ in C pergat moveri usque ad centrum virium S per rectam CS , interea ac aliud uniformi cum motu describeret arcum HK , sector HSK æqualis sit area DSE . Et quoniam id verum est, ubicumque capiatur punctum A , ex quo initium habet motus corporis; obtinebit etiam, quum punctum illud A , vel abit in infinitum, vel etiam ad partem oppositam in a .

Et quidem, quum punctum A abit ad partem oppositam in a , circulus ADS fit hyperbola æquilatera : ex quo patet, quod si corpus descendat ex a , hoc est ex distantia plusquam infinitâ, in loco C talem acquirat velocitatem, ut si velocitate illâ pergat moveri usque ad centrum virium S , area DSE illius hyperbolæ æquilateræ æqualis sit sectori, quem corpus radio, dimidium recti lateris Sa æquante, circa centrum S

uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.

Quod si punctum illud A abeat in infinitum, circulus ADS fiet parabola, cujus latus rectum est infinitum. Unde liquet, quod si corpus descendat ex infinita distantia, in loco C talem nanciscatur velocitatem, ut si eam pergat moveri usque ad centrum virium S, area DSE illius parabolæ æqualis sit etiam sectori, quem corpus eodem tempore describere potest, gyrando uniformiter circa centrum virium S radio, æquante dimidium recti lateris illius parabolæ.

Jam, datâ CS, area DSE ejus parabolæ est, ut ordinata CD, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti; datoque tempore descriptionis, sector ille, cui æqualis est area DSE, est ut velocitas, qua describitur directè, & radius sectoris inversè, adeoque etiam in subduplicatâ ratione lateris recti. Quocirca, si latus rectum illius parabolæ ed usque minuat, donec finitum evadat; quia, tam area DSE, quàm sector prædictus minuuntur in ratione illâ subduplicatâ, manebunt adhuc æquales inter se.

Ex quibus modò facile erit, corporis de loco dato sursum, vel deorsum projecti, definire tempora ascensus, vel descensus, quum urgetur vi centripetâ reciprocè proportionali

li quadrato distantiae. Exeat enim corpus de loco dato C secundum rectam ACS cum velocitate quacumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem illam, qua corpus revolveretur circulariter in distantiam CS , cape duplum ipsius AC ad AS ; jamque si ratio illa minor sit, quàm 2 ad 1, punctum A reperietur supra punctum S in distantia finitâ; quod si verò ratio illa æqualis fuerit ei, quam habet 2 ad 1, abibit punctum A in infinitum; & denique, si eadem illa ratio major sit, quàm 2 ad 1, reperietur punctum A infra centrum virium S , puta in a .

Priori casu describatur super AS semicirculus ADS ; secundo casu vertice S , & axe SC describatur latere quovis recto parabola SED ; & denique in tertio casu describenda est hyperbola æquilatera SED latere transverso Sa . Tum centro S , intervallo æquante dimidium lateris recti figuræ descriptæ describatur in omni casu circulus OKH . Et siquidem ad corporis ascendentis, vel descendents loca duo quævis C , & G erigantur perpendicula CD , GF , quæ secant descriptam figuram in D , & F ; junctisque DS , FS , fiant areis $DSED$, $FSEF$ æquales sectores HSK , HSI ; corpus projectum describet spatium CG eodem tempore, quo describere posset arcum KI .

Cæterum, priusquam huic capiti finem

im-

imponamus, non abs re erit, paulisper contemplari conatum centrifugum, ex circulari corporum motu oriundum. Dictum est non unâ vice, vi centripetâ detorqueri corpus de tangente in orbem, atque aded cohiberi, ne conatu centrifugo abeat per tangentem. Itaque vis centripeta, & vis centrifuga, tum in circulo, cum in alio quovis orbe, non secus ac actio, & reactio, inter se æquales erunt, & contrariæ: proindeque quæcumque de vi centripetâ ostensa sunt, poterunt etiam ad vim centrifugam, sive conatum excussorium applicari.

Hinc quemadmodum in circulo vis centripeta est vel directè, ut quadratum velocitatis applicatum ad radium, vel reciprocè, ut quadratum temporis applicatum ad radium; itâ in eodem circulo vis centrifuga eandem rationem obtinebit. Quocirca, si vis centrifuga dicatur C , velocitas V , tempus T , & radius R , habebitur, & $C = \frac{VV}{R}$, & $C = \frac{R}{TT}$. Quibus equidem formulis si hæc alia addatur $V = \frac{R}{T}$, quæ eruitur ex

motu æquabili; jam iis mediantibus id omne poterit definiri, quod spectat ad conatum centrifugum, ex circulari corporum motu oriundum. Quod

Quod si conatus iste centrifugus comparandus sit cum propriâ corporis gravitate, recordemur oportet ejus, quod superius ostensum est: nempe, quod si corpus æquabiliter in circulo motum dato tempore arcum aliquem describat, spatium, quod percurreret eodem tempore sola vi centripetâ, vel centrifugâ uniformiter agente, sit tertium proportionale circuli diametro, & arcui prædicto. Hinc enim sequitur, quod si iisdem ut supra manentibus dicatur A altitudo, ex qua cadendo gravitate G , quam non variabilem, sed uniformem in præsentiarum consideramus, acquiritur velocitas V ; sit ut C ad G , ita $2A$ ad R .

Nam, ob motum æquabilem corporis in circulo, velocitate acquisitâ in descensu per altitudinem A , describetur æquali tempore arcus duplus ipsius A ; adeoque spatium, quod percurreret corpus eodem tempore, solâ vi centrifugâ, uniformiter agente, prodibit dividendo $4AA$ per $2R$, sive etiam $2AA$ per R . Unde, quum causæ proportionales sint effectibus, quos eodem tempore producant, erit ut quotiens hujus divisionis ad A , hoc est ut $2AA$ ad AR , sive etiam ut $2A$ ad R , ita C ad G . Est igitur conatus centrifugus ad gravitatem, ut duplum altitudinis A ad radium: Unde, si altitudo A adæquet quartam partem diametri, conatus

tus centrifugus æqualis erit gravitati.

FIG.
328.

Moveri potest corpus circulariter circa conum aliquem, nimirum, quum suspenditur per filum, quod motu suo superficiem conicam describat. Sit itaq; filum AM , quod moveatur motu conico circa axem AD erectum horizonti, ita ut pondus M , quod extremitate sua gerit, describat circumferentiam circuli MQR . Designet AC vim retinentem filum AM sub angulo DAM , jamque demisso ad axem AD perpendiculo CB , resolvetur vis illa in duas alias laterales AB , CB ; nec dubium esse potest, quin prior AB sit illa, quæ oritur ex gravitate corporis M ; & altera CB ea, quæ provenit à motu circulari circa punctum D . Quare, iisdem ut supra symbolis manentibus, erit $AB = G$, & $CB = C$. Est autem, ut AB ad CB , ita AD ad MD . Itaque positis $AD = B$, & $MD = R$; erit ut C ad G , ita R ad B , hoc est, ut conatus centrifugus ad gravitatem, ita radius ad altitudinem cono.

Sed tempora circuitus in hoc motu conico possunt etiam inter se mutuò conferri. Nam, quum sit, ut C ad G , ita R ad B ; data gravitate G , erit cono altitudo, ut radius directè, & conatus centrifugus inversè. Est autem conatus centrifugus reciprocè, ut quadratum temporis applicatum ad radium; adeoque ratio directà radii, & inver-

sa conatus centrifugi componunt rationem temporis duplicatam. Itaque erit ex æquali coni altitudo in duplicatâ temporis ratione; & propterea in motu conico tempora circuitus erunt in subduplicatâ ratione ejus, quam habent conorum altitudines. Hisce autem principiis insistendo, facile erit ostendere omnia Hugeniâna theoremata circa motum conicum pendulorum, & superfluum existimo, hisce diutiùs immorari.

C A P. VI.

*De motu projectorum in orbibus mobilibus;
ubi de motu Apsidum.*

Huc usque consideravimus motum projectorum in orbibus immobilibus; sed fieri quoque potest, ut moveantur corpora projecta in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur. Id cernere licet in motibus planetarum secundariorum. Nam, quum ii urgeantur non modò viribus propriis, ad suos primarios tendentibus, verùm etiam viribus illis, quibus & ipsi primarii urgentur versus solem; fit hinc, ut cujusque motus, ob duplicem istam tendentiam, subinde perturbetur, ut loco ellipseos immotæ describat ellipsim, cujus axis angulari motu circa primarii centrum prorsum,

sum, vel retrorsum movetur.

FIG.
129.

De motu itaque projectorum in orbibus mobilibus acturi, illud primò considerabimus, quod semel ac corpus describit orbem APQ . qui eodem tempore revolvitur circa centrum virium C , duplicem illud motum habeat, eum nempe, quo incedit in orbe suo, tum etiam motum ipsius orbis. Ex duplici autem hoc motu, liquet compositum iri motum secundum lineam curvam Apq : proindeque perinde erit, si corpus in curvæ hujus perimetro immobili moveatur, quàm si incederet in orbe mobili APQ .

Neque verò difficile erit definire naturam alterius hujus curvæ Apq . Si enim fuerit Cp æqualis CP , describetur arcus Ap eodem tempore motu composito, quo describitur solo corporis motu arcus AP . Unde, quia ex theoremate Newtoniano, superius à Nobis ostenso, proportionalis est tempori, tam area ACP , quàm area ACp ; dabitur ratio, quam habet area ACP ad aream ACp ; & propterea curvæ Apq accidens præcipuum hoc erit, ut si centro C describatur arcus Pp , secans tam curvam APQ in P , quàm curvam Apq in p , area ACP datam habeat rationem ad aream ACp .

Sed angulus ACP proportionalis etiam est angulo ACp . Nam si describatur alter arcus Qq priori Pp concentricus, & indefinite pro-

proximus ; dabitur ratio inter areolas PCQ , pCq . Sed ratio harum areolarum eadem est, quæ arcuum QT , qt , sive etiam angulorum PCQ , pCq ; quum sint æquales rectæ CP , Cp . Itaque data etiam erit ratio, quam habet angulus PCQ ad angulum pCq ; & propterea, componendo, dabitur quoque ratio inter angulum ACP , & angulum ACp .

Hinc siquidem efficiendum sit, ut corpus in orbe apb revolvente circa centrum virium C perinde moveri possit, ac corpus aliud in eodem orbe APB quiescente, ita nempe, ut dum istud in orbe quiescente APB describit arcum AP , illud percurrat arcum similem, & æqualem ap in orbe revolvente apb ; facile cum Celeberrimo Newtono solvetur problema, agendo semper per centrum C in plano orbis quiescentis rectam Cp , quæ ipsi CP æqualis, efficiat angulum ACp proportionalem angulo ACP ; ita, ut area, quam Cp motu angulari circa C sic lata describit, proportionalis sit area, quam describit CP .

Sit enim $Apqr$ curva, quam punctum p modo jam exposito motum contingit. Et quoniam unâ cum P revolvitur corpus, quod urgetur à vi centripetâ, tendente ad centrum C ; per theorema Newtonianum erit area ACP temporis proportionalis. Quare, quum area ACp proportionalis sit area

ACP

ACP, area ACp etiam tempore proportionalis erit. Consistit autem hæc area in plano immoto, scilicet in eodem plano orbis quiescentis APB. Itaque poterit corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ, revolvi unâ cum puncto *p* in curvâ Apqr, quam punctum *p* describit.

Jam curva ista Apqr datur, utpote genita ex curvâ APB modo dato, & constanti. Quare per formulas superius traditas nihil prohibet, quominus inveniatur lex vis centripetæ, qua corpus revolvi possit in curvâ Apqr. Et quoniam, si fiat angulus ACa æqualis angulo PCp, rectaque Ca rectæ CA æqualis, figura, quæ describitur super Ca, similis, & æqualis ipsi ACP, terminatur ad rectam Cp subinde quidem, ut punctum *p* sit in perimetro ipsius figuræ; perspicuum est, quod describendo corpus, unâ cum puncto *p*, curvam immotam Apqr, describat etiam perimetrum orbis apb, revolventis, circa centrum C, eâ lege, ut eodem tempore, quo describitur in orbe quiescente APB arcus quilibet AP, describatur in orbe revolvente APB arcus similis, & æqualis ap.

Itaque solvetur propositum problema, si descriptâ curvâ Apqr modo illo dato, & constanti, quærat per formulas superius traditas lex vis centripetæ, qua corpus in
cur-

curvâ illâ revolvi possit. Interim, cognitâ lege vis centripetæ, quæ requiritur ad describendum orbem quiescentem APB, facile erit, legem alterius illius vis determinare, ob pulcherrimum istud theorema, Newtono similiter ferendum acceptum, quod differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possint, sit in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.

Neque verò difficile erit ostendere præclarum istud theorema. Nam, si corporum, in locis P, & p existentium, resolvantur motus singuli in binos, quorum alii versus centrum, hoc est secundum lineas PC, pC determinantur, & alii prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC, pC perpendiculares directionem habeant; in hypothesisi, quod corpora P, & p æqualibus viribus versus centrum urgeantur, motus versus centrum æquales erunt, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, hoc est ut angulus ACp ad angulum ACP, sive etiam ut angulus pCq ad angulum PCQ.

Hinc siquidem constituatur angulus pCo æqualis angulo PCQ, & demissis super CP, Cp perpendiculis QR, or, producaturs or, usque donec conveniat cum Cq in s; quia so, oq

non differunt sensibiliter ab or , os , atq; adeo
 rs est ad or , ut angulus pCq ad angulū PCQ ,
 five pCo ; erit ex æquali, ut motus transversus
 corporis p ad motum transversum corporis
 P , ita rs ad or . Unde, designatis æqualibus
 corporum motibus versus centrum per æ-
 quales lineolas pr , PR , si designet RQ mo-
 tum transversum corporis P , designabit rs
 motum transversum corporis p : ex quo fiet,
 ut eodem tempore, quo corpus P motu suo
 utroque pervenit ad punctum Q , corpus
 alterum p per compositionem utriusque sui
 motus reperiatur in s .

Jam corpus p tempore illo reperitur in q .
 Unde consequens est, ut falsa sit positio, quod
 corpora P , & p æqualibus viribus versus cē-
 trum urgentur. Urgentur itaq; corpora vi-
 ribus inæqualibus, eritque differentia illa-
 rum virium in dato tempore, ut lineola
 sq . Est autem, propter circulum, lineola
 ista sq æqualis quotienti, qui oritur, divi-
 dendo $rs^2 \rightarrow ro^2$ per compositam ex Cs ,
 & Cq , hoc est æqualis quotienti, qui
 nascitur, dividendo $tq^2 \rightarrow to^2$ per duplum
 ipsius Cq . Itaque eadem virium differen-
 tia in dato tempore erit, ut $tq^2 \rightarrow to^2$ di-
 rectè, & Cq , five Cp inversè.

Et quoniam, ob datum tempus, datur
 tum area PCQ , cum area pCq ; fiet tam tq^2 ,
 quàm QT^2 , five to^2 reciprocè proportionalis
 ipsi

ipsi Cp^2 : unde eidem Cp^2 reciprocè etiam proportionalis erit $tq^2 - to^2$; adedque quantitas , quæ est , ut $tq^2 - to^2$ directè , & Cp inversè , erit reciprocè , ut cubus ipsius Cp . Quare differentia virium , quibus corpus P in orbe quiescente APB , & corpus aliud p in eodem orbe revolvente apb æqualiter moveri possunt , erit in triplicatâ ratione communis altitudinis CP , sive Cp inversè .

Verùm , ut præclari hujus theorematis beneficio , ex datâ lege vis centripetæ , quæ requiritur ad describendum orbem quiescentem APB , inveniatur lex vis centripetæ , requisitæ ad describendum orbem revolventem apb , sive perimetrum curvæ $Apqr$; inquirendum est etiam , utra earum virium major est , ut sciatur , num præfata illa virium differentia , quæ est reciprocè ut cubus altitudinis CP , sive Cp , addi debeat , aut subtrahi ex vi corporis P , ut habeatur vis corporis p .

Etsi enim in schemate suppositum sit , corpus p majore vi urgeri versus centrum , quàm corpus alterum P , fieri tamen potest , ut urgeatur quandoque vi minore . Id indicat Newtonus in ipsâ sui theorematis demonstratione ; sed in Tyronum gratiam necesse est , ut paulò clariùs ostendatur . Itaque in hoc negotio duo casus sunt distin-

guendi . Primus erit , quum corpus à summâ apside ad imam descendit . Alter vicissim , quum ab imâ ad summam ascendit .

In primo casu , ubi corpus à summâ apside ad imam descendit , quum motus orbis revolventis fit in consequentiâ , hoc est in eandem plagam , versus quam dirigitur motus corporis , major semper erit vis corporis moti in orbe revolvente , quàm vis corporis moti in orbe quiescente . At verò , quum motus fit in antecedentiâ ; tunc , vel regreditur velocitate maiore , quàm est dupla ejus , qua progreditur linea CP , & rursus majore vi urgebitur corpus motum in orbe revolvente , quàm id , quod movetur in orbe quiescente ; vel regreditur velocitate minore , & isto casu minor erit vis corporis moti in orbe revolvente , quàm ejus , quod movetur in orbe quiescente .

Omnia autem per contrarium contingent in casu secundo , ubi corpus ab imâ apside ad summam ascendit . Nam , quum orbis revolvitur in consequentiâ , minor semper erit vis corporis moti in orbe revolvente , quàm vis corporis moti in orbe quiescente . Quotiescumque verò orbis revolvitur in antecedentiâ ; tum , vel regreditur velocitate maiore , quàm est dupla ejus , qua progreditur linea CP , & rursus minore vi urgebitur corpus motum in orbe revolvente , quàm

quàm id, quod movetur in orbe quiescente; vel regreditur velocitate minore, & isto casu major erit vis corporis moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiescente.

Hæc omnia sigillatim ostendere, superfluum duco. Tantùm indicabo fontes, unde eorum demonstrationes sunt repetendæ. Nimirum primò erit major vis corporis, moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiescente; quotiescumque angulus ACp major est angulo ACP . Isto etenim casu, quoniam angulus pCq major etiam est angulo PCQ , fiet hinc, ut si constituatur angulus pCo æqualis angulo PCQ , & producatur or usque donec conveniat cum Cq in f , reperiri debeat corpus motum in orbe revolvente in puncto f eodem tempore, quo corpus aliud motum in orbe quiescente pervenit ad Q , si utique æqualibus viribus versus centrum urgeretur. Unde, quum illud reperiat in q eodem tempore, quo istud pervenit ad Q , atque adeò magis accedat ad centrum; consequens est, ut major vis centripeta in illo existat, quàm in isto.

Secundò erit minor vis corporis, moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiescente, quum vicissim angulus ACp minor est angulo ACP . Nam hoc alio

casu, quoniam angulus pCq minor est etiam angulo PCQ , constituto per contrarium ad rectam lineam CP , atque ad datum in eâ punctum C angulo, qui sit æqualis angulo pCq , peractisque in figurâ PCQ , quæ in priori casu fiebant in figurâ pCq ; inveniatur eodem ratiocinio non posse corpus motum in orbe quiescente reperiri in puncto Q eodem tempore, quo corpus aliud, motum in orbe revolvente pervenit ad punctum q , nisi major ei vis centripeta insit.

Ex quibus sponte suâ sequitur tertio, vim corporis moti in orbe revolvente adæquare vim ejus, quod movetur in orbe quiescente, quum angulus ACp æqualis est angulo ACP , & consequenter angulus pCq æqualis angulo PCQ . Id autem fieri non potest, quum orbis revolvitur in consequentiâ, quia in isto casu angulus ACp major semper est angulo ACP ; sed tantum continget, quum orbis fertur in antecedentiâ, & regreditur eâ cum velocitate, quæ sit dupla ejus, qua progreditur recta CP . Nec mirum, quia in isto casu curva $Apqr$ abit ad partem alteram respectu axis AB , sitque ipsi APB similis, & æqualis.

Itaque, si major sit vis corporis, moti in orbe revolvente, si major vis ejus, quod movetur in orbe quiescente, semper differ-

ren-

rentia earum virium erit reciproce, ut cubus communis altitudinis. Sed eadem illa virium differentia in locis P , & p , vel Q , & q poterit etiam conferri cum vi , qua corpus motu circulari revolvi possit à T ad Q eodem tempore, quo corpus P in orbe immobili describit arcum PQ . Nam, quemadmodum effectus differentiarum illarum virium est recta sq , hoc est quotiens, qui oritur, dividendo $tq^2 - to^2$ per duplum rectæ Cq ; ita effectus, qui gignitur à vi , requisitâ ad prædictum motum circulare, est sinus versus arcus TQ , sive to ; hoc est quotiens, qui oritur, dividendo to quadratum per duplum ejusdem Cq . Unde differentia illa virium ad vim istam alteram erit, ut $tq^2 - to^2$ ad to^2 , hoc est ut $gg - ff$ ad ff , si fuerit ut f ad g , ita angulus ACP ad angulum ACp .

Atque hinc modò, si orbis APB sit ellipsis, cujus C sit umbilicus unus, & $2l$ latus rectum principale, ponaturque CP , sive $Cp = a$; erit vis centripeta, qua corpus in ellipsi mobili apb revolvi potest, in omni loco p , ut $aff \mp lgg - lff$ directe, & a^3 inverse. Nam vis, qua corpus in ellipsi immobili APB revolvitur, in omni loco P est reciproce, ut quadratum distantiae CP ; adedque est, ut ff directe, & aa inverse, inque apside A , ut ff directe, & AC^2 inverse. Vis

autem, qua corpus in circulo ad distantiam AC eâ cum velocitate revolvi posset, quam corpus in ellipsi revolvens habet in A (ut ostensum est in capite antecedenti) est ad vim, quam corpus in ellipsi motum habet in A , ut dimidium lateris recti principalis $2l$ ad AC . Quare erit vis illa, ad prædictum motum circulare requisita, ut lff directè, & AC^3 inversè.

Et quoniam differentia virium in A , & a , ut mox ostensum est, est ad vim requisitam ad prædictum motum circulare, ut $gg - ff$ ad ff ; erit differentia illa virium in locis A , & a , ut $lgg - lff$ directè, & AC^3 inversè. Demonstravimus autem, differentiam virium in locis A , & a esse ad differentiam virium in locis P , & p , ut est CP^3 , sive a^3 ad AC^3 . Itaque erit differentia virium in locis P , & p , ut $lgg - lff$ directè, & a^3 inversè. Quocirca, si ad vim, quæ est ut ff directè, & aa inversè, hoc est, ut aff directè, & a^3 inversè, addatur vis, quæ est, ut $lgg - lff$ directè, & a^3 inversè; orietur vis, quæ erit, ut $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè, eaque erit illa, qua corpus in ellipsi mobili apb habet in loco p .

Sed monitum Lectorem hoc loco velim, quod etsi determinatio concepta videatur in eo casu, ubi major est vis corporis moti in orbe revolvente apb , quàm ejus, quod move-

ve-

vetur in orbe quiescente APB, eadem tamen locum habeat etiam in casu contrario; ut hinc generaliter verum sit, vim centripetam, qua corpus revolvitur in ellipsi mobili apb , esse in omni loco p , ut est $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè. Cujus rei ratio exinde repetenda est, quia quum per contrarium major est vis corporis moti in orbe quiescente, quàm ejus, quod movetur in orbe revolvente, angulus ACp minor est angulo ACP ; adeòque $lgg - lff$, utpote quantitas negativa, non auget, sed minuit valorem ipsius aff .

Jam, si supponamus orbem ellipticum apb esse circulo valde finitimum, haud difficile modò erit ex datâ lege vis centripetæ determinare motum apsidum, hoc est rationem, quam habet f ad g , sive angulus ACP ad angulum ACp . Poterit namque problema resolvi, faciendo, ut orbis $Apqr$, quem corpus in ellipsi revolvente motum describit, accedat ad formam orbis, cujus apfides requiruntur, & inveniendò apfides orbis sic descripti. Quum enim orbis ad eandem accedant formam, quotiescumque vires centripetæ, quibus describuntur, in æqualibus à centro distantiis proportionales sunt; determinabitur ratio inter f , & g , hoc est motus apsidum quæsitus, conferendo terminos, exprimentes datam legem vis centri-

tripetæ, cum iis, quibus eadem vis centripeta generaliter paulò ante determinata est.

Verum, ut hæc collatio appositè fiat, vocetur t maxima altitudo, sive distantia AC, & x differentia ipsarum AC, & CP: ita, ut a , quæ repræsentat distantiam indeterminatam CP, sit $t - x$; & vis, quam in ellipfi mobili apb habet corpus in loco p , sit ut $tff - xff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè, hoc est ut fractio, quæ habet $tff - xff + lgg - lff$ pro numeratore, & a^3 pro denominatore. Sic enim satis erit, valorem datæ vis centripetæ reducere ad similem fractionem, hoc est ad talem, quæ habeat similiter a^3 pro suo denominatore, & tantùm conferre inter se mutuò terminos numeratorum, nempe datos cum datis, & ignotos cum ignotis.

Rem uno, aut altero exemplo illustremus. Ponamus, vim centripetam uniformem esse, adedque proportionalem quotienti, qui oritur, dividendo a^3 , sive $t^3 - 3txx + 3txx - x^3$ per a^3 . Conferendi sunt igitur termini istius quantitatis $t^3 - 3txx + 3txx - x^3$ cum terminis hujus $tff - xff + lgg - lff$, hoc est t^3 cum $tff + lgg - lff$, & $3txx - 3txx + x^3$ cum xff . Erit itaque, ut t^3 ad $tff + lgg - lff$, ita $3tt - 3tx + xx$ ad ff . Jam verò, ob orbem ellipticum circulo quammaximè finitimū, æquales sunt ferè t , & l ,

& l , itemque x negligi potest. Quare erit, ut t ad l gg, ita $3tt$ ad ff , hoc est ut tt ad gg , ita $3tt$ ad ff : unde fiet, ut f ad g , hoc est ut angulus ACP ad angulum ACp , ita $\sqrt{3}$ ad 1 : proindeque corpus, quod cum vi centripetâ uniformi revolvitur in orbe propemodum circulari, inter apsidem summam, & apsidem imam conficiet angulum, qui erit ad duos rectos, ut 1 ad $\sqrt{3}$.

Ponamus secundò, vim centripetam esse reciprocè, ut a^2 , adeòque proportionalem quotienti, qui oritur dividendo a , sive $t - x$ per a^3 . Conferendi sunt itaque termini istius quantitatis $t - x$ cum terminis hujus $tff - xff + lgg - lff$, hoc est t cum $tff + lgg - lff$, & x cum xff . Erit itaque, ut t ad $tff + lgg - lff$, ita 1 ad ff ; hoc est, propter orbem ellipticum propemodum circularem, ut t ad l gg, ita 1 ad ff ; sive etiam, ut 1 ad gg , ita 1 ad ff . Unde fiet f ad g , hoc est angulus ACP ad angulum ACp in ratione æqualitatis: id, quod ostendit, non posse corpus urgeri vi centripetâ reciprocè proportionali quadrato distantiae, nisi vel ipse orbis quiescat, vel etiam regrediatur cum velocitate duplâ ejus, qua progreditur recta corpus deferens.

Sed generaliter, si ponamus vim centripetam proportionalem esse a^n , hoc est potestati ipsius distantiae a , cujus exponens sic

nu-

numerus n , five integer, five fractus, five positivus, five negativus; invenietur reducendo a^n , five $t \rightarrow x^n$ ad seriem infinitam, esse, ut f ad g , hoc est, ut angulus ACP ad angulum ACp , ita $\sqrt[n]{n+3}$ ad 1: & propterea inter apsidem summam, & apsidem imam conficiet corpus angulum, qui sit ad duos rectos in subduplicatâ ratione ejus, quam habet 1 ad $n+3$. Unde si vis centripeta fuerit reciprocè proportionalis cubo distantiae, quia n fit -3 , atque adeò $n+3$ idem est, ac zero; perficiet corpus revolutiones infinitas, donec ab apside summa perveniat ad apsidem imam.

Hinc vicissim ex dato motu apsidum colligere licet legem vis centripetae. Sic motus lunaris apogei singulis revolutionibus est graduum trium, & minutorum trium in consequentiâ. Unde, calculo inito, invenietur, quod si distantia lunæ à centro terræ sit ad semidiametrum telluris, ut d ad 1, vis, à qua motus talis oriatur, sit reciprocè

490

ut ea potestas ipsius d , cujus index est $-\frac{490}{243}$,

243

hoc est in ratione distantiae paulò majore, quàm duplicatâ inversè, sed quæ partibus

3

59 $-\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam, quàm tripli-

4

ca-

catam accedit. Hinc ex ipso motu lunaris apogei colligi potest, vim, qua luna retinetur in orbe suo, esse reciprocè, ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro. Nam excessus ille supra duplicatam oritur ab actione solis; proindeque, neglectâ solis actione, vis reliqua, qua luna retinetur in orbe, erit reciprocè, ut d^2 .

Hæc methodus determinandi motum apsidum, hoc est rationem, quam habet f ad g , five angulus ACP ad angulum ACp , per comparisonem terminorum, exprimentium datam legem vis centripetæ, cum iis, quibus eandem vim centripetam generaliter designavimus, debetur Viro summo, numquam satis laudando, Isaaco Newtono. Sed nolim hîc silentio præterire methodum alteram, excogitatam ab Egregio Mathematico Jacobo Hermannò, quæ hoc idem præstat canone generali, quæcumque fuerit lex vis centripetæ.

Nimirum, si generaliter vis centripeta in omni loco p ellipsis mobilis apb fuerit, ut quantitas aliqua p ex datis, & variabili a utcumque composita directè, & a^3 inversè, quia eadem vis centripeta est etiam, ut $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè; erit $p = aff + lgg - lff$. Unde, si porro decrementum infinitesimum magnitudinis p dicatur qda , erit $qda = ffa$, hoc est $q = ff$. Jam
ve-

verò, propter orbem ellipticum propemodum circulare, æquales sunt ferè a , & l ; adeoque pro æquatione $p = aff + lgg - lff$, usurpari potest hæc alia $p = lgg$. Itaque erit, ut p ad q , ita lgg ad ff , sive etiam, ut p ad ql , ita gg ad ff . Unde eruitur canon Hermannii, nempe, quod g sit ad f , ut $\sqrt{p}$ ad $\sqrt{ql}$, sive etiam, ut $\sqrt{p}$ ad $\sqrt{qa}$.

Ita, si vis centripeta sit constans, fiet $p = a^3$, & $q = 3aa$; unde erit, ut g ad f , ita $\sqrt{a^3}$ ad $\sqrt{3a^3}$, hoc est ita $\sqrt{1}$ ad $\sqrt{3}$. Similiter, si vis centripeta sit reciproce, ut a^2 , fiet $p = a$, & $q = 1$: unde erit g ad f , ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{a}$, hoc est in ratione æqualitatis. Atque ita quoque, si vis centripeta sit, ut a^n , fiet $p = a^{n-3}$, & $q = n - 3a^{n-4}$. Quare erit, ut g ad f , ita $\sqrt{a^{n-3}}$ ad $\sqrt{n-3}a^{n-3}$, hoc est ita $\sqrt{1}$ ad $\sqrt{n-3}$. Quæ omnia probè conspirant cum determinationibus, quas in iisdem legibus vis centripetæ ex Newtonianâ methodo paulò ante eruimus.

MONITIUM AD LECTOREM.

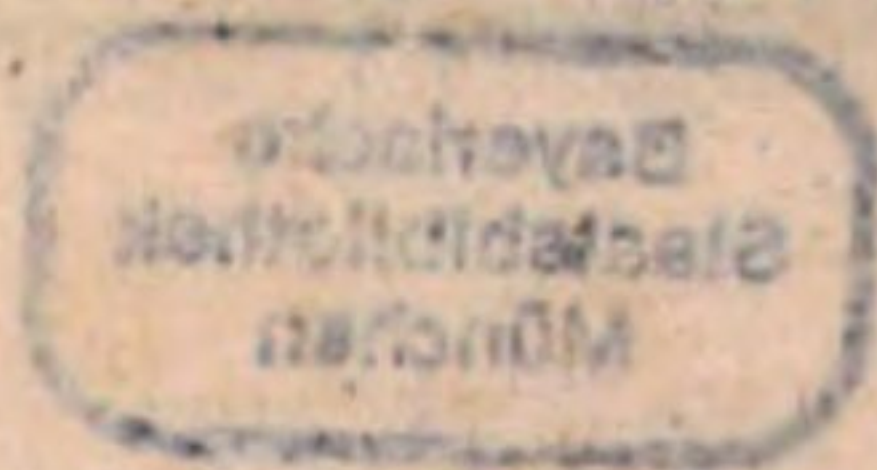
VAcuis paginis explendis, simulque Operis perfectioni consulens, duo hîc monitum Lectorem volo.

Primum est, quod in doctrinâ de resistentiâ solidorum, horizontaliter suspensorum, quum simpliciter prisma nomino, non aliud intelligi debeat, quàm quod talem habet basem, ut centrum gravitatis istius basis bisecet

secet ejus altitudinem. Alioqui enim falsæ essent omnes istæ propositiones, ibidem generaliter assertæ. I, quod momentum resistentiæ in prismatico homogeneo æstimari possit per basim, ductam in prismatis altitudinem; & momentum ponderis per factum ex pondere in longitudinem prismatis. II, quod quum momentum resistentiæ adæquat momentum ponderis, resistentia sit ad pondus, ut longitudo ad altitudinem. III, quod maximum pondus sustinens prisma in suspensione verticali sit ad maximum pondus sustinens in suspensione horizontali, ut longitudo ad altitudinem. Et IV, quod maximum pondus sustinens prisma suspensum verticaliter sit ad maximum pondus, quod sustinet innixum duobus fulcimentis, ut est longitudo prismatis dimidiata ad ejus altitudinem.

Alterum, quod theorema illud circa spatia epicycloidalia: nempe, quod si recta FN secet epicycloidem ad rectos angulos in puncto N, portio spatii epicycloidalis interni ABFN sit ad portionem correspondentem spatii circularis ABE, ut est $2OC + OB$ ad OB , ostendi quoque possit in hunc modum. Nimirum portiones epicycloidis AN, AR sunt ad chordas AE, AQ, ut est $2OC$ ad OB . Itaque differentia illarum portionum NR erit ad differentiam chordarum EX similiter,

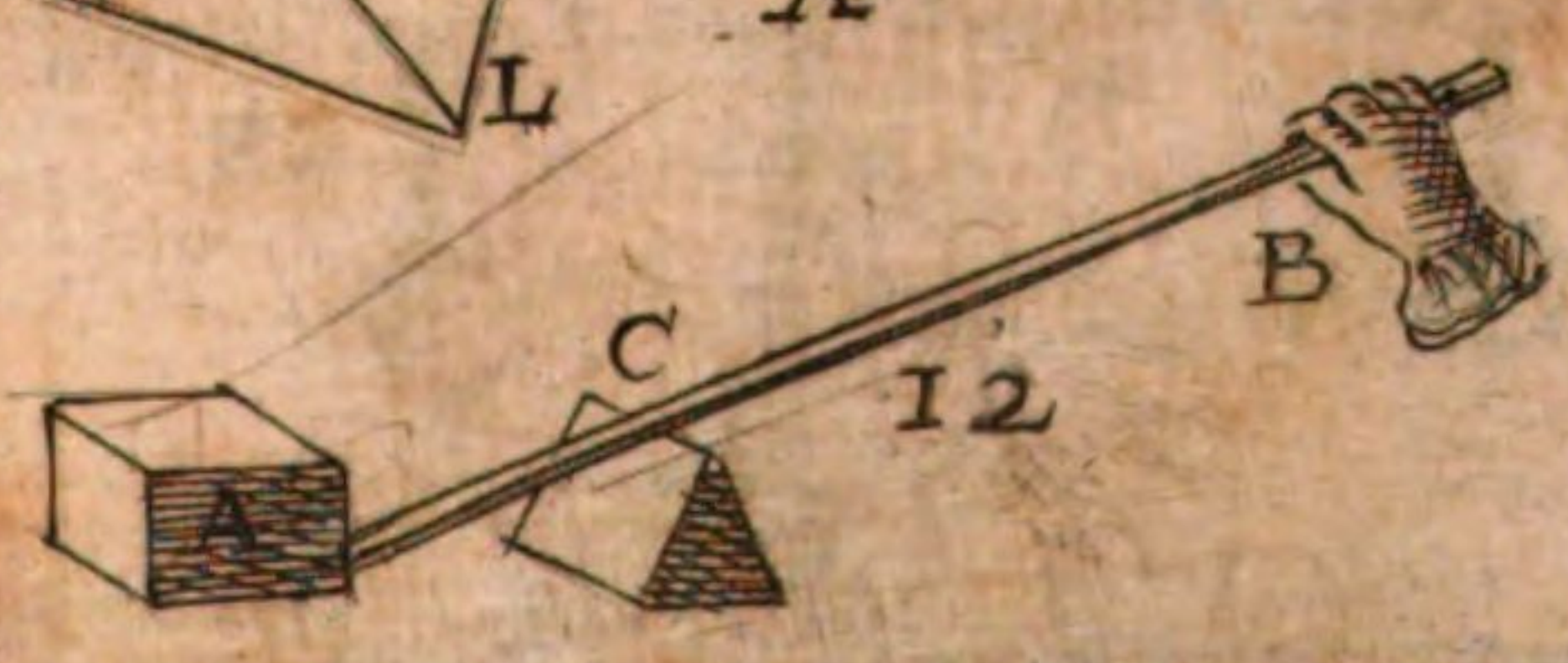
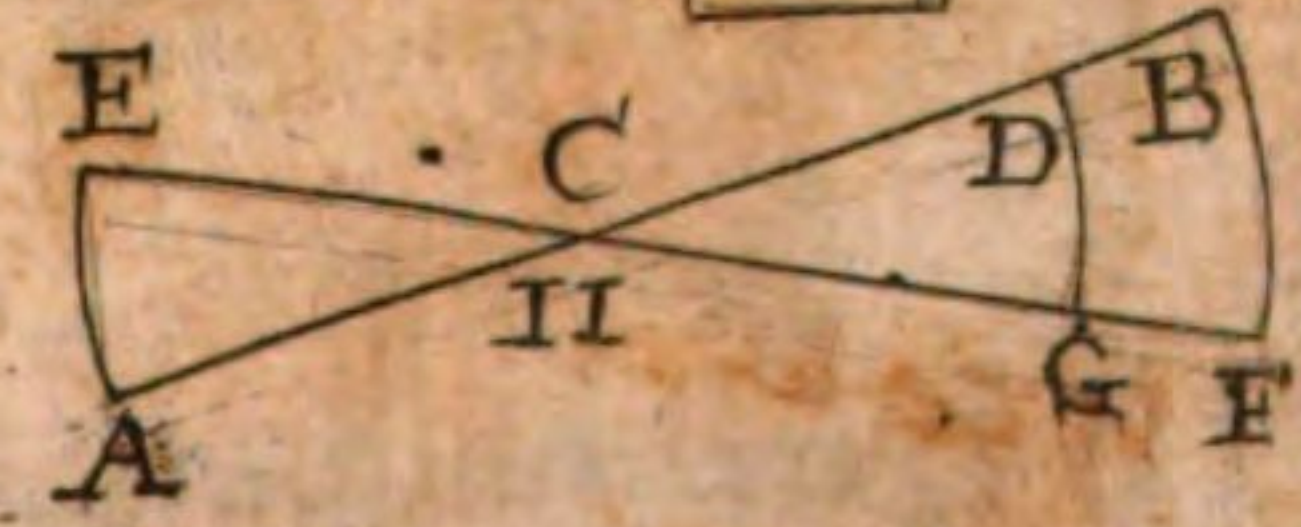
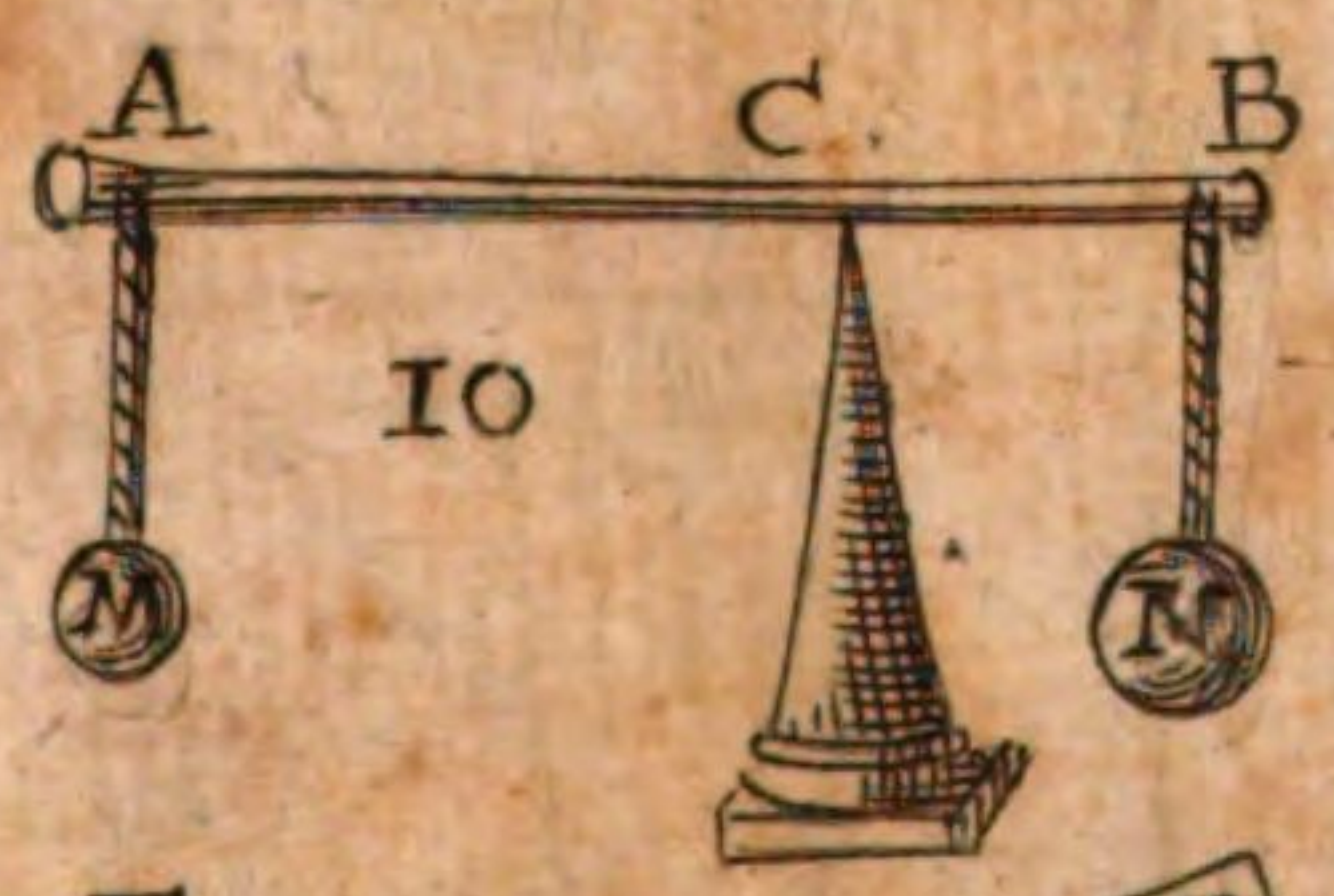
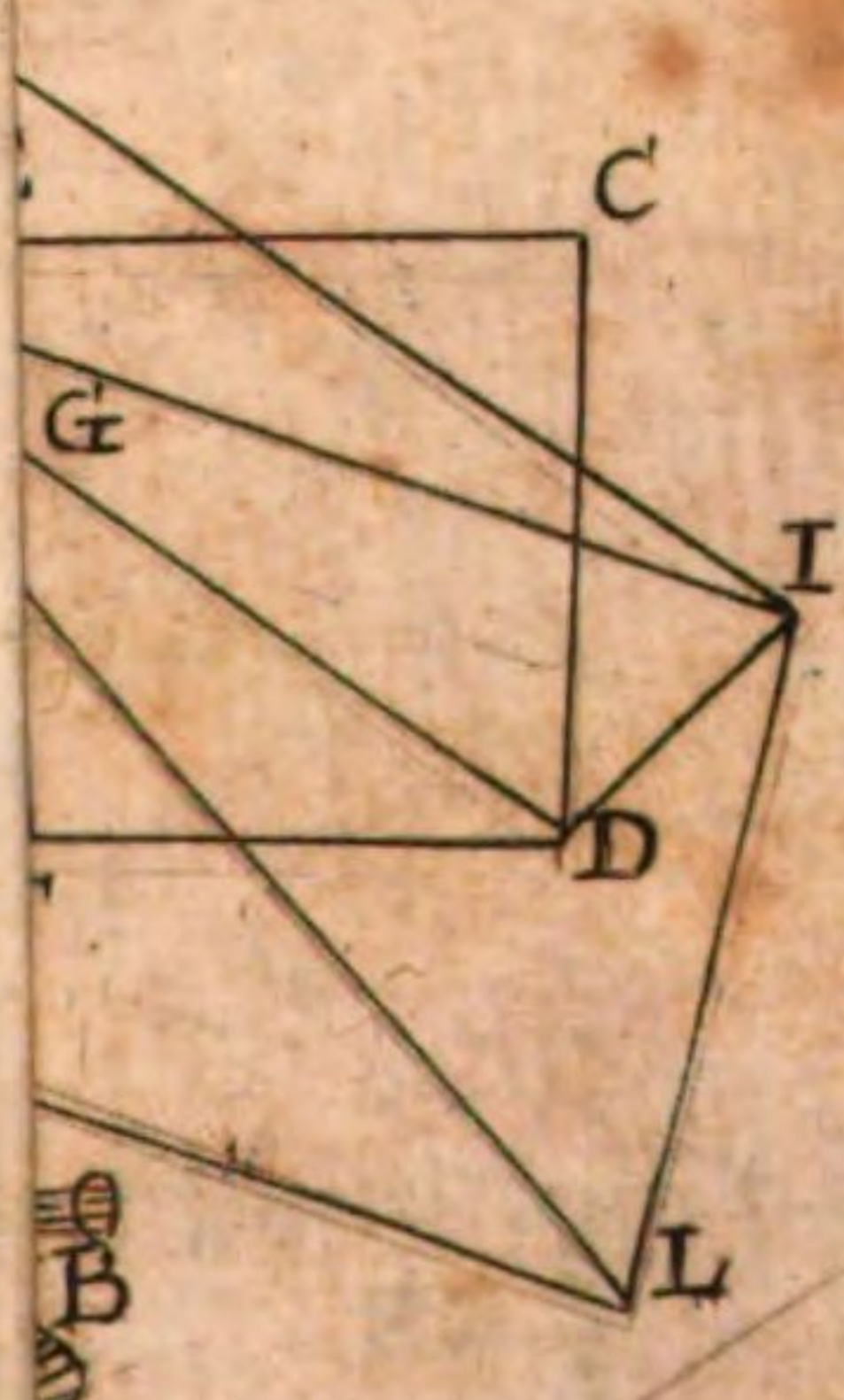
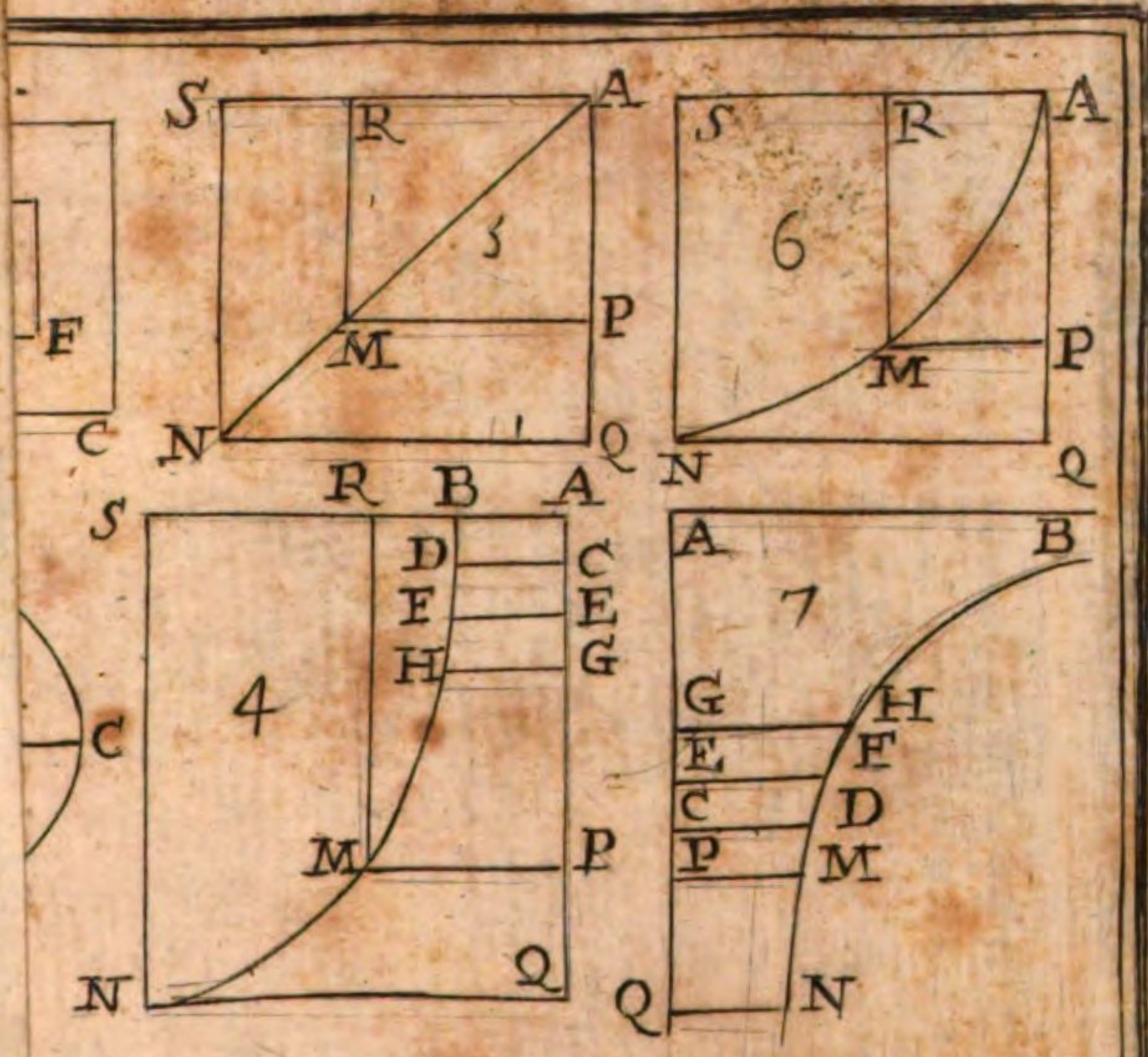
FIG.
94.95.



ter, ut $2OC$ ad OB ; atque aded componendo $NR \div EX$ erit ad EX , ut $2OC \div OB$ ad OB . Ostensum est autem (pag. 354) FS æqualem esse ipsi EX . Itaque erit etiam $NR \div FS$ ad EX , ita $2OC \div OB$ ad OB . Jam verò ob æquales FN , BE , trapetiolum $NFGR$ est ad exiguum triangulum EBQ , ut $NR \div FS$ ad EX . Quare erit ex æquali, ut trapetiolum $NFGR$ ad exiguum triangulum EBQ , ita $2OC \div OB$ ad OB ; & propterea componendo erit etiam in hac eadem ratione spatium totum epicycloidale internum $ABFN$ ad correspondens spatium circulare ABE .

Horum primum ut Lectorem monitum facerem, Auditor fuit Vir Eximius Augustinus Arianus, qui pro suâ humanitate paginas hasce, ut edebantur, perlustrabat. Sed & alterum adjiciendum duxit insigne Mathematicum decus Hyacinthus Christophorus, quem ab hac vitâ recens exemptum, maximo disciplinarum omnium detrimento, nemo est in hac urbe, qui graviter non lugeat. Nempe existimabat Vir tum rerum cognitione, cum morum probitate omni laude major, demonstrationem ejus theorematis in opere allatam non omnibus probatam iri; adedque aliam voluit, ut loco ejus subrogarem.

F I N I S.



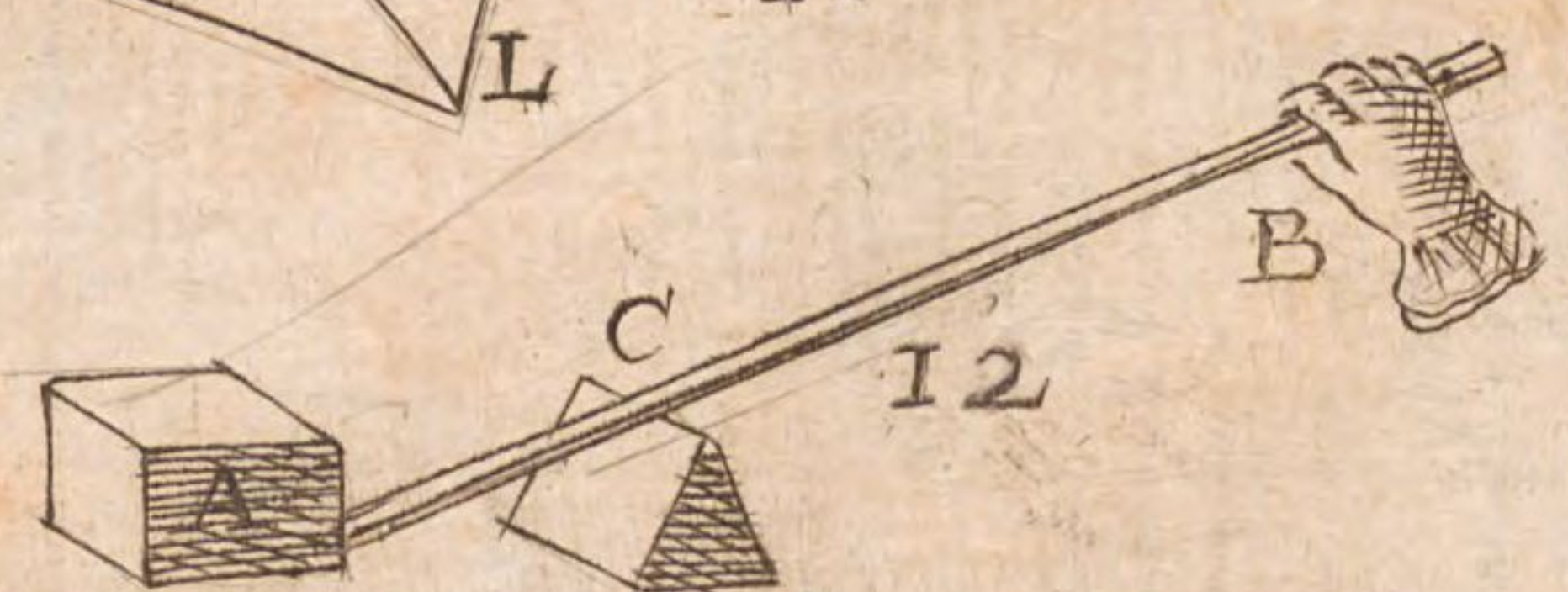
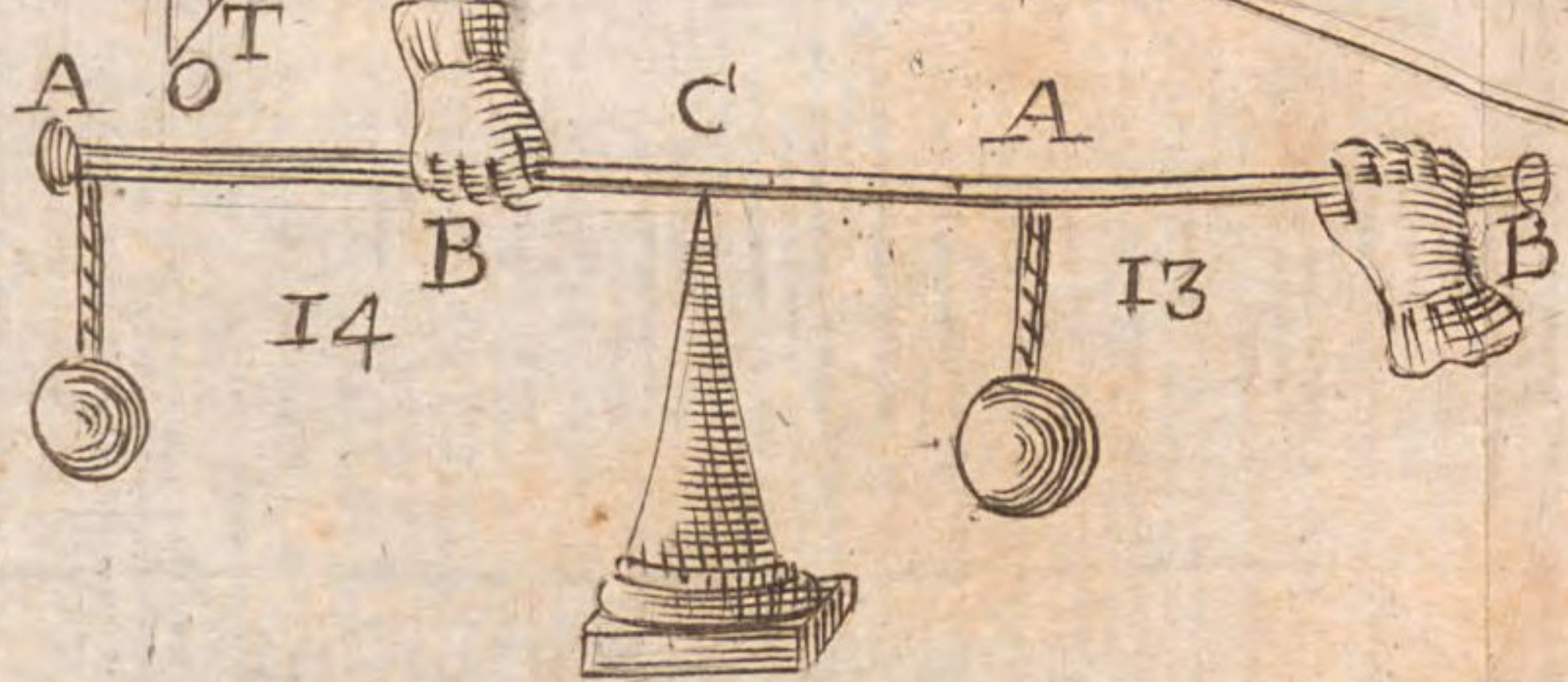
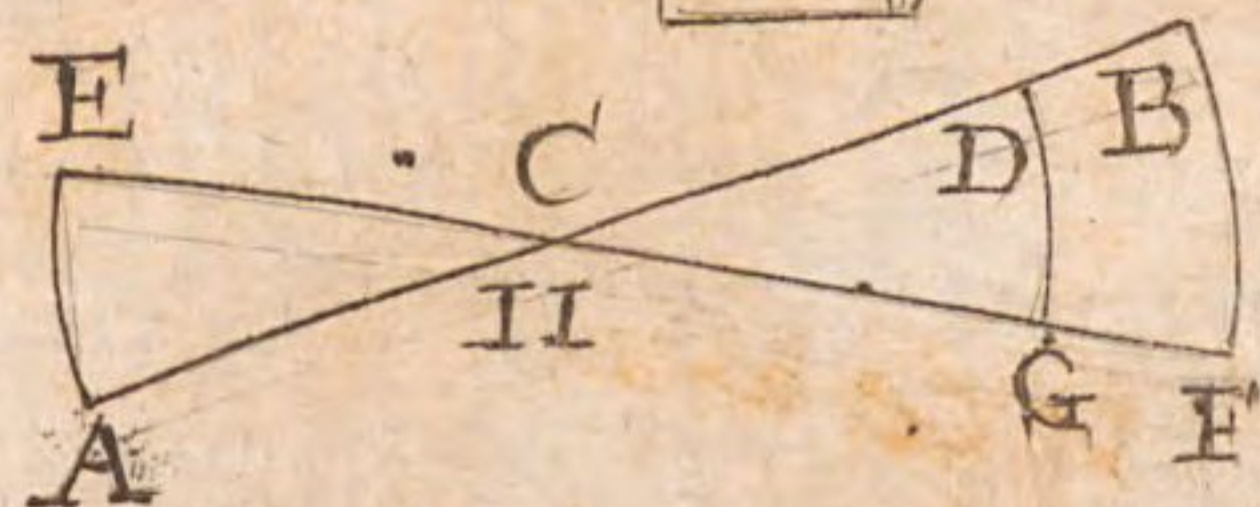
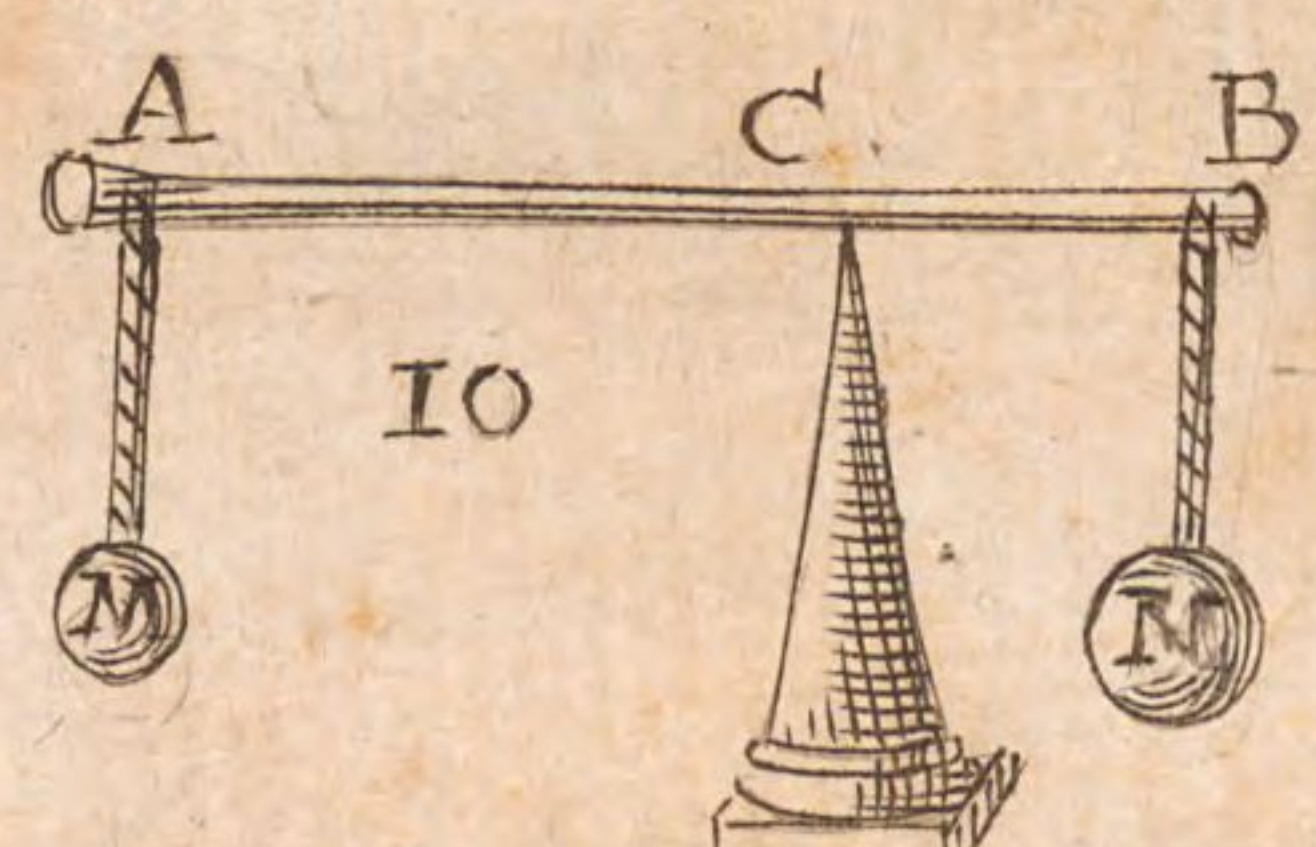
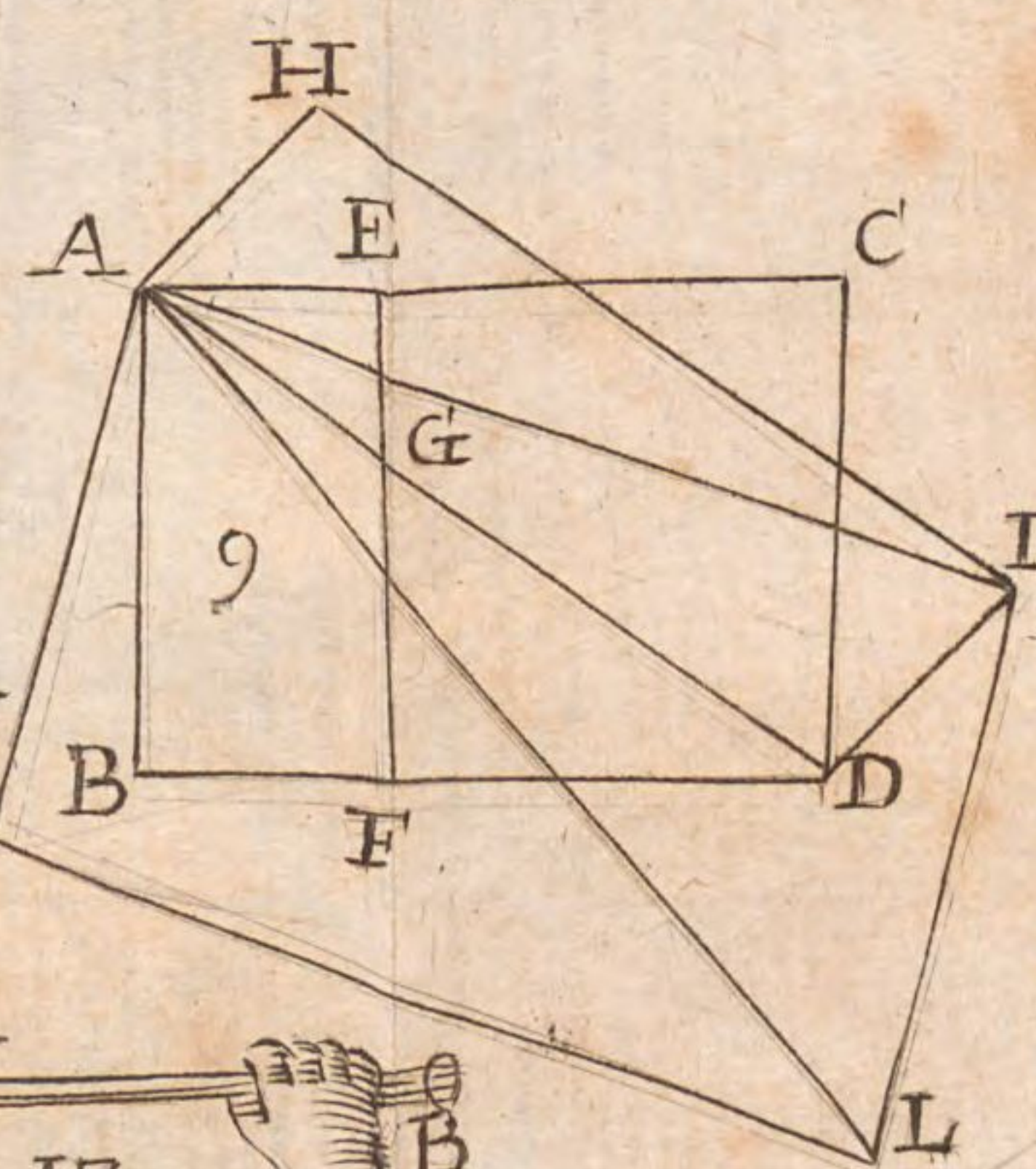
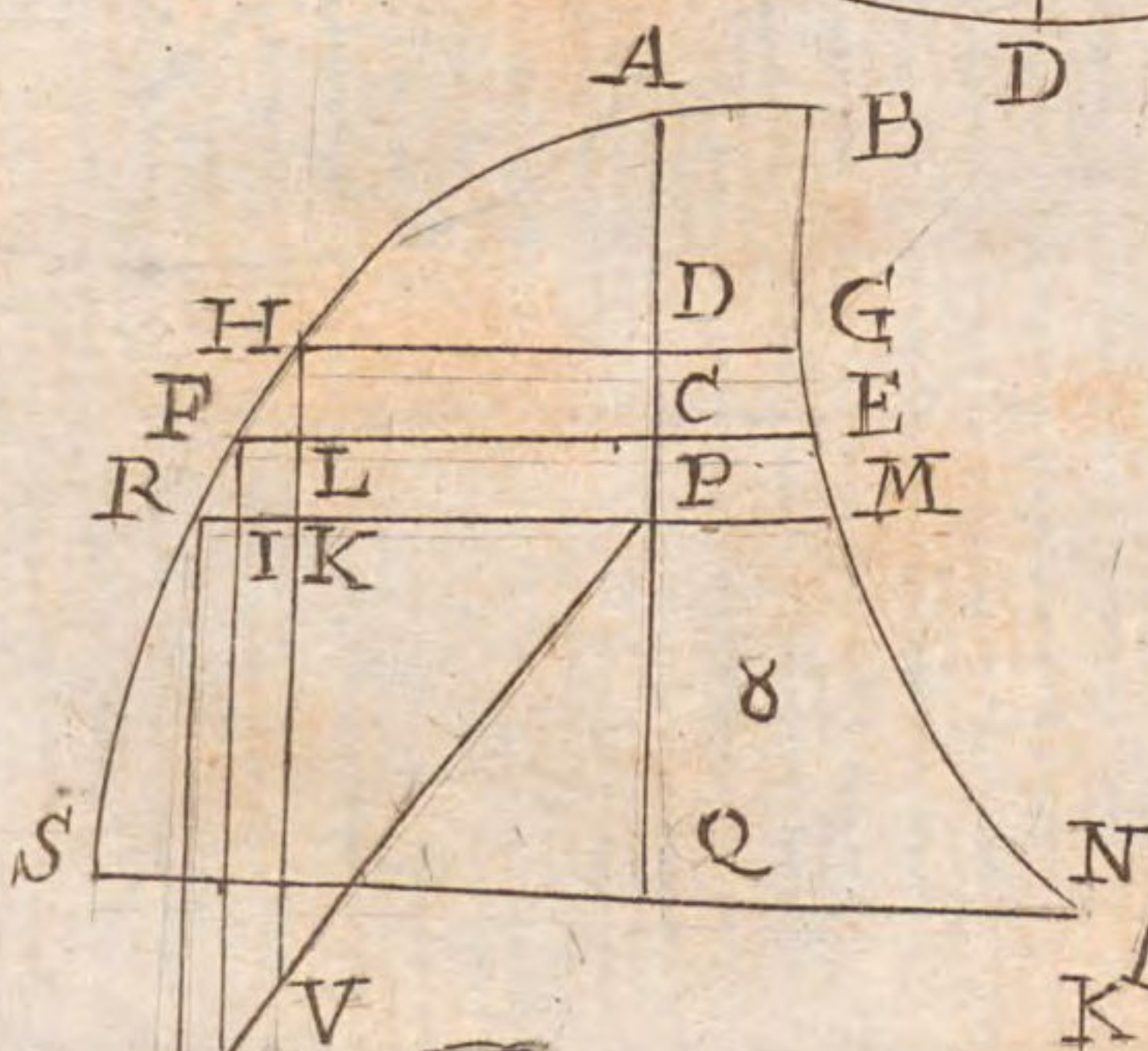
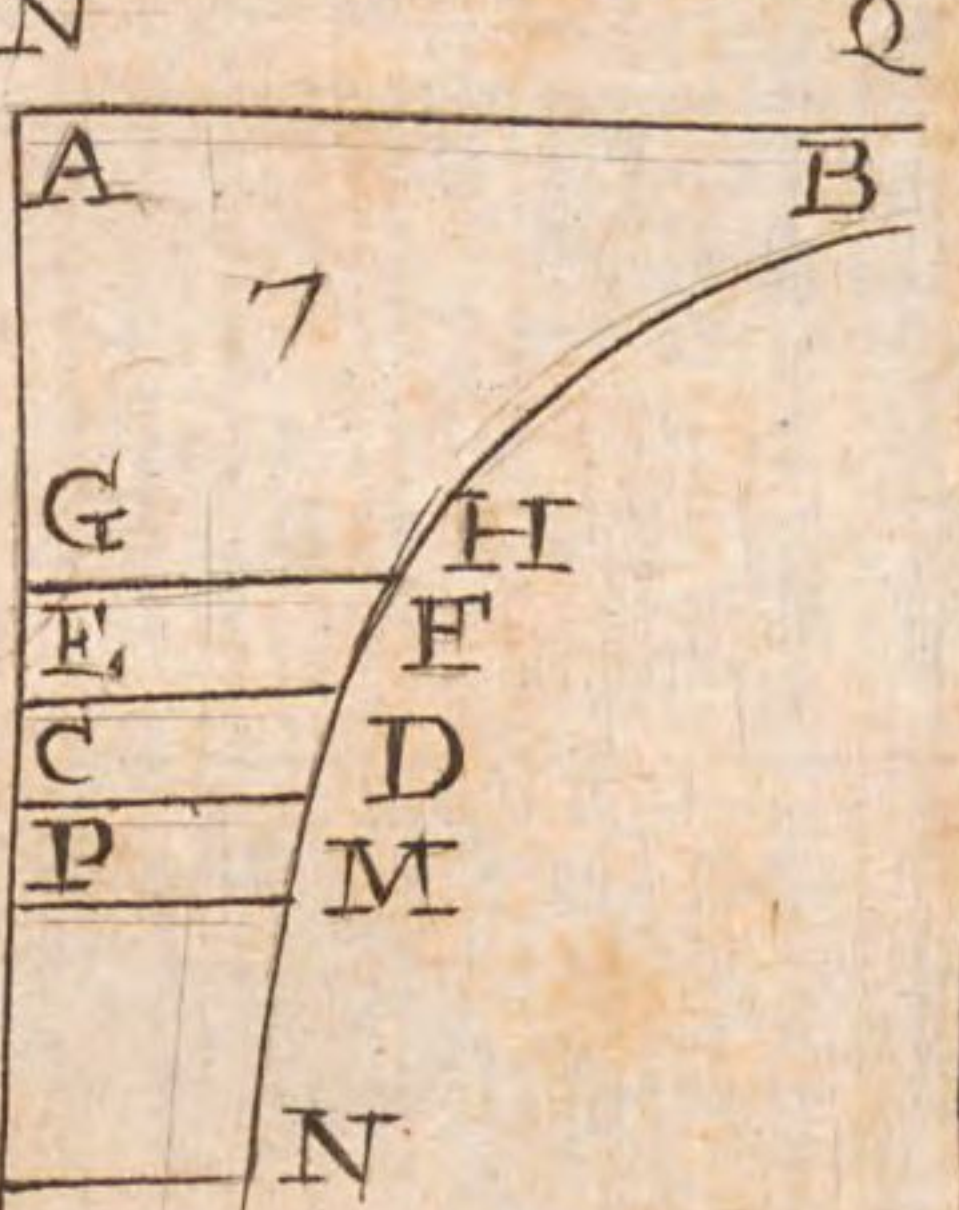
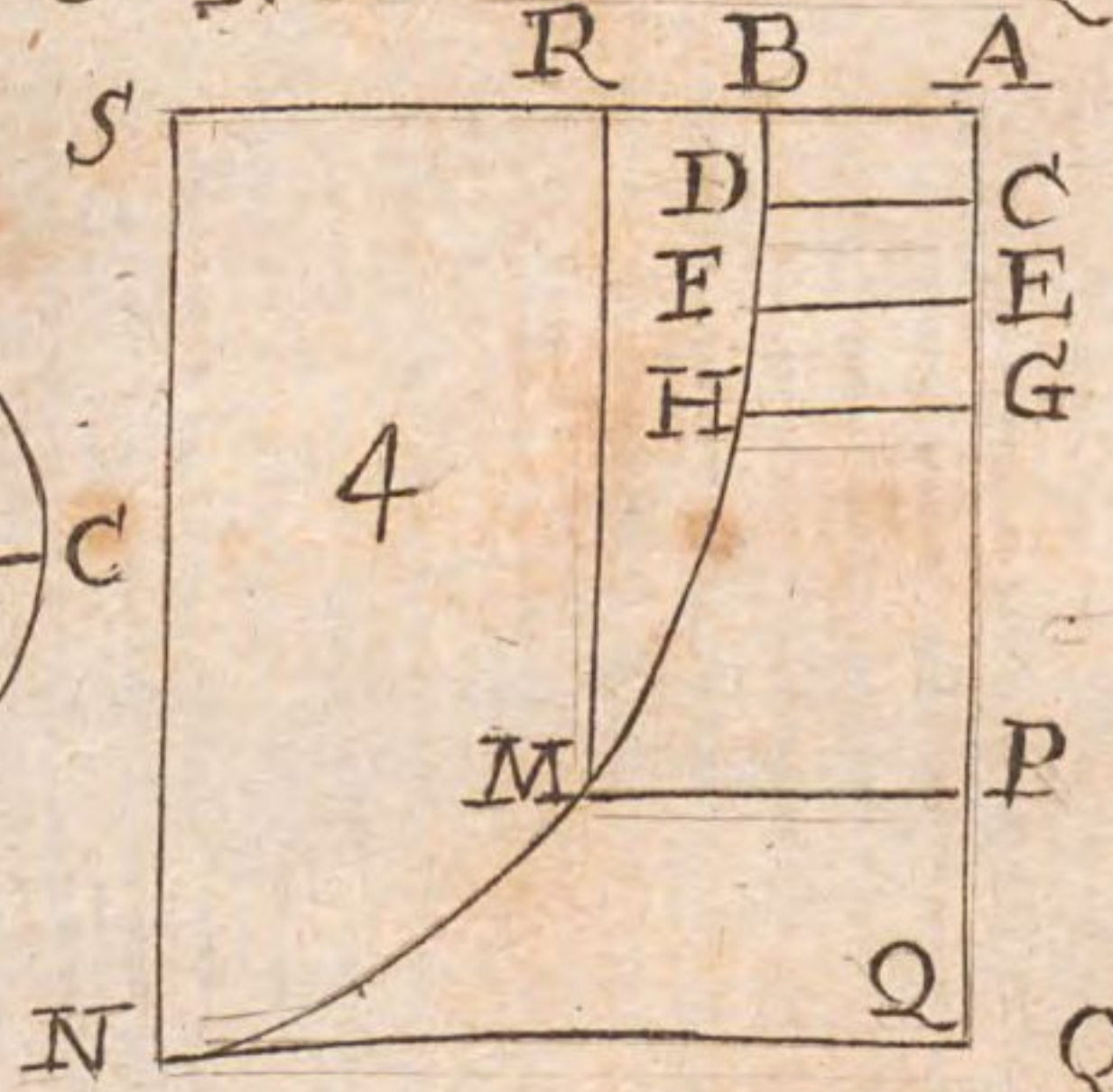
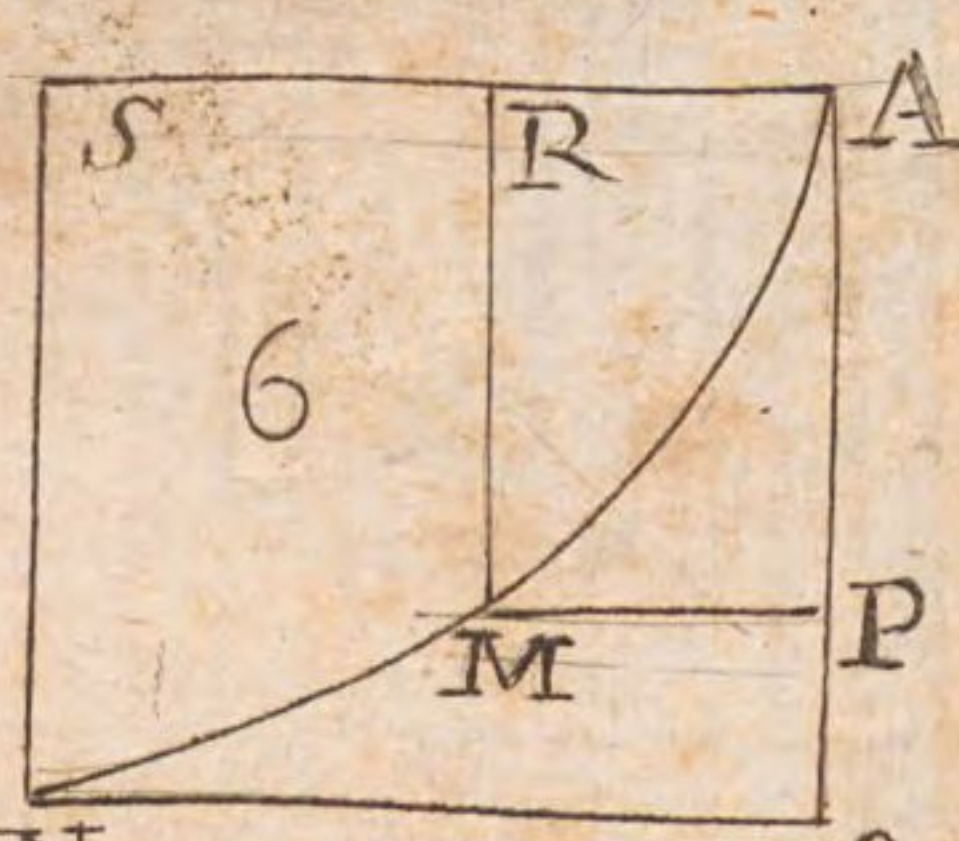
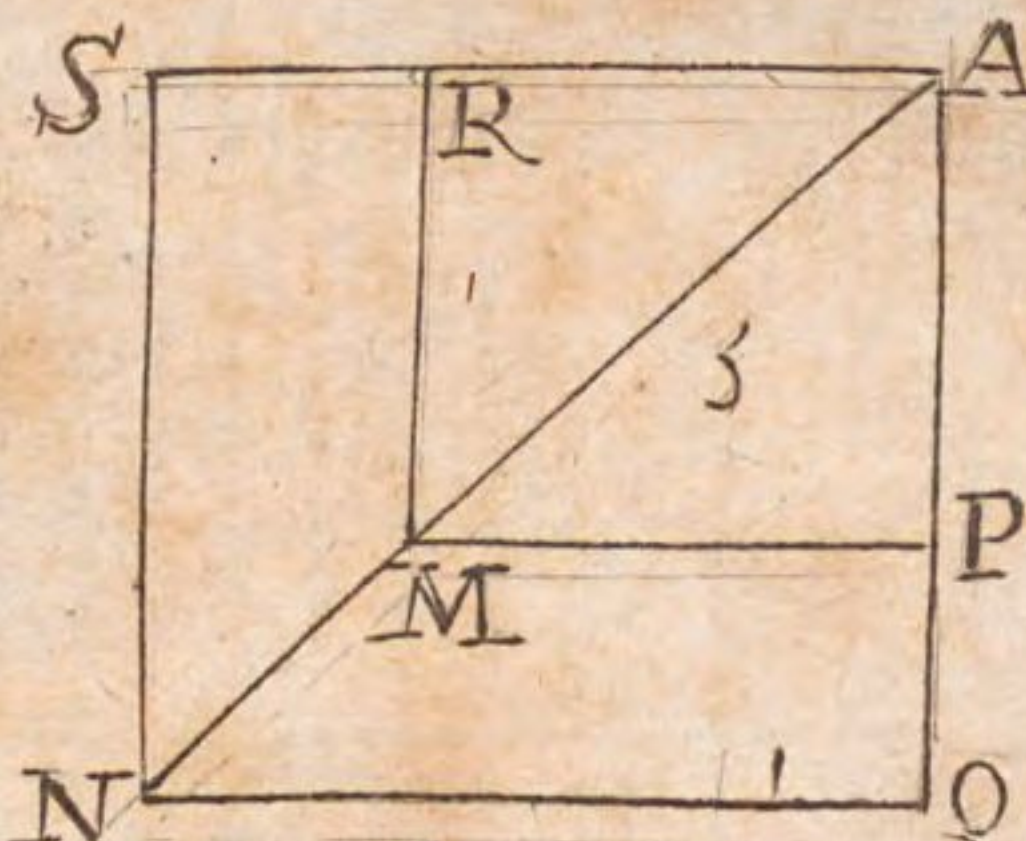
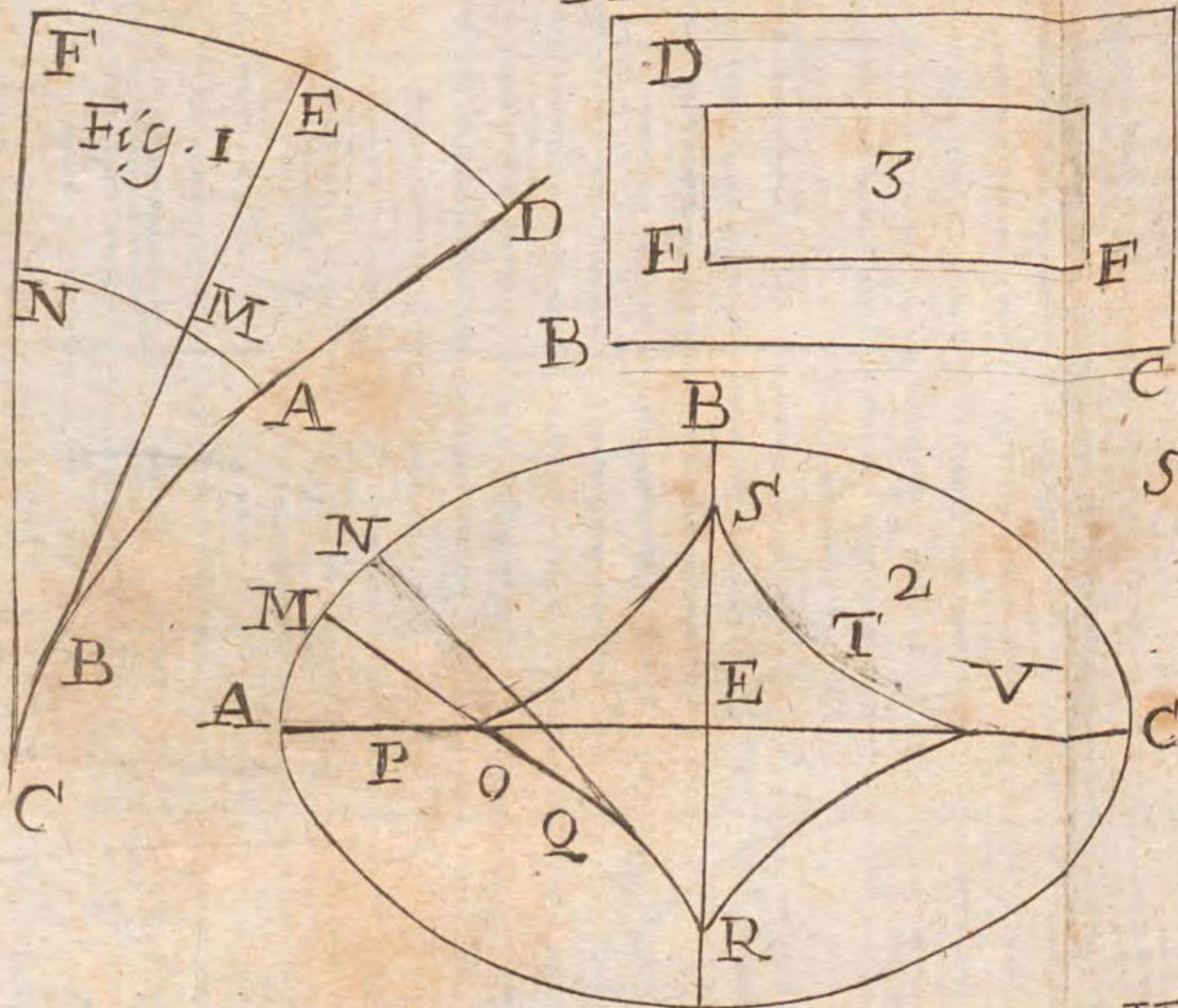
ter, ut $2OC$ ad OB ; atque aded componendo $NR + EX$ erit ad EX , ut $2OC + OB$ ad OB . Ostensum est autem (pag. 354) FS æqualem esse ipsi EX . Itaque erit etiam $NR + FS$ ad EX , ita $2OC + OB$ ad OB . Jam verò ob æquales FN , BE , trapetiolum $NFGR$ est ad exiguum triangulum EBQ , ut $NR + FS$ ad EX . Quare erit ex æquali, ut trapetiolum $NFGR$ ad exiguum triangulum EBQ , ita $2OC + OB$ ad OB ; & propterea componendo erit etiam in hac eadem ratione spatium totum epicycloidale internum $ABFN$ ad correspondens spatium circulare ABE .

Horum primum ut Lectorem monitum facerem, Auditor fuit Vir Eximius Augustinus Arianus, qui pro suâ humanitate paginas hasce, ut edebantur, perlustrabat. Sed & alterum adjiciendum duxit insigne Mathematicum decus Hyacinthus Christophorus, quem ab hac vitâ recens exemptum, maximo disciplinarum omnium detrimento, nemo est in hac urbe, qui graviter non lugeat. Nempe existimabat Vir tum rerum cognitione, cum morum probitate omni laude major, demonstrationem ejus theorematis in opere allatam non omnibus probatam iri; adedque aliam voluit, ut loco ejus subrogarem.

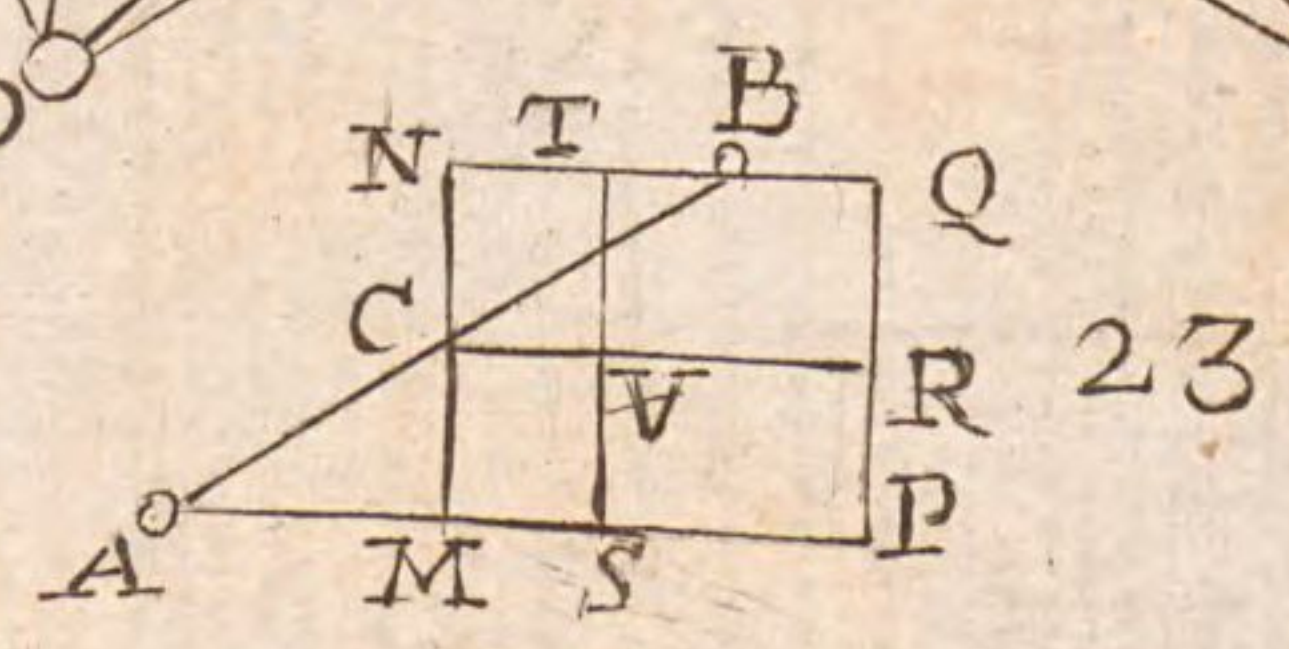
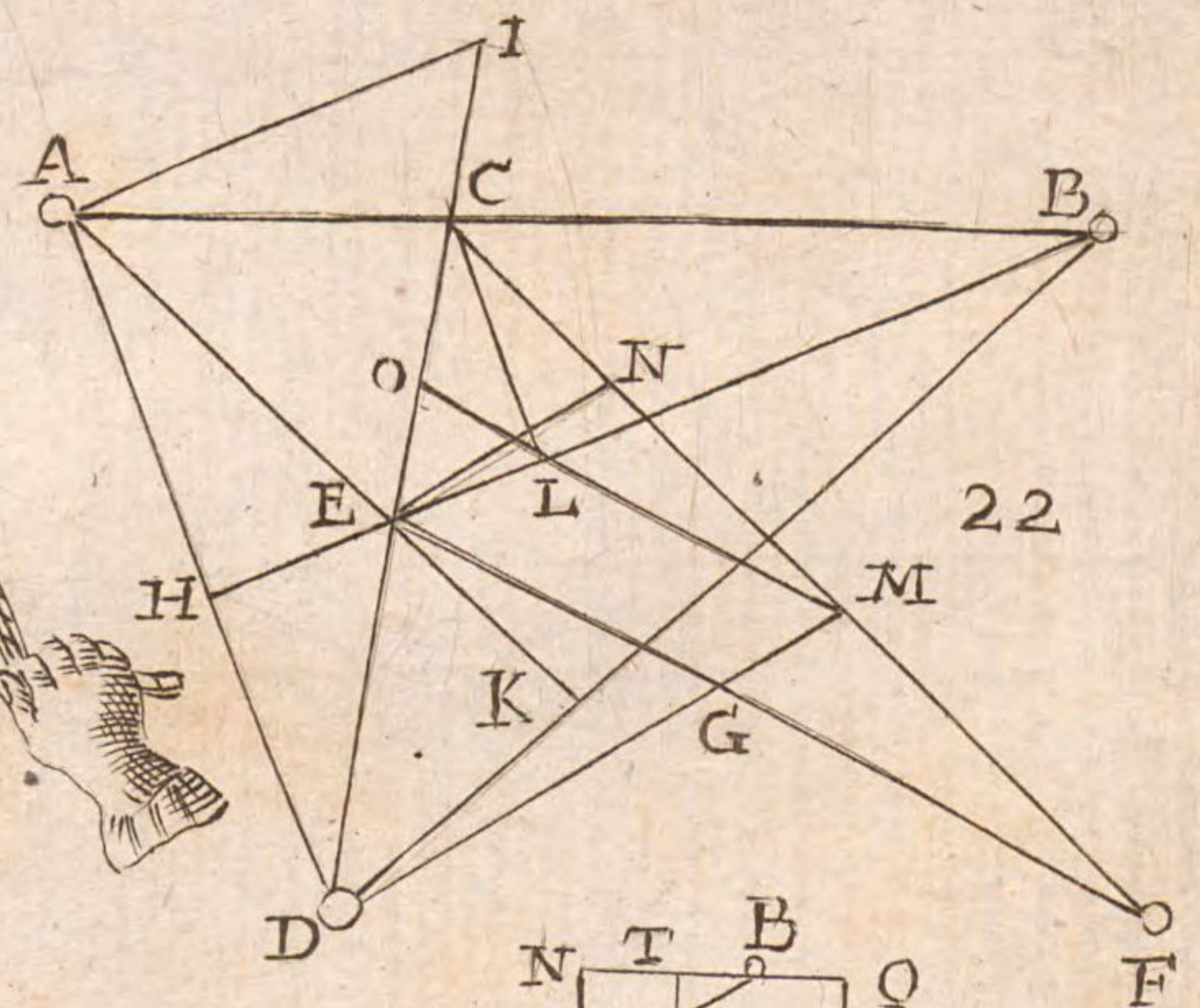
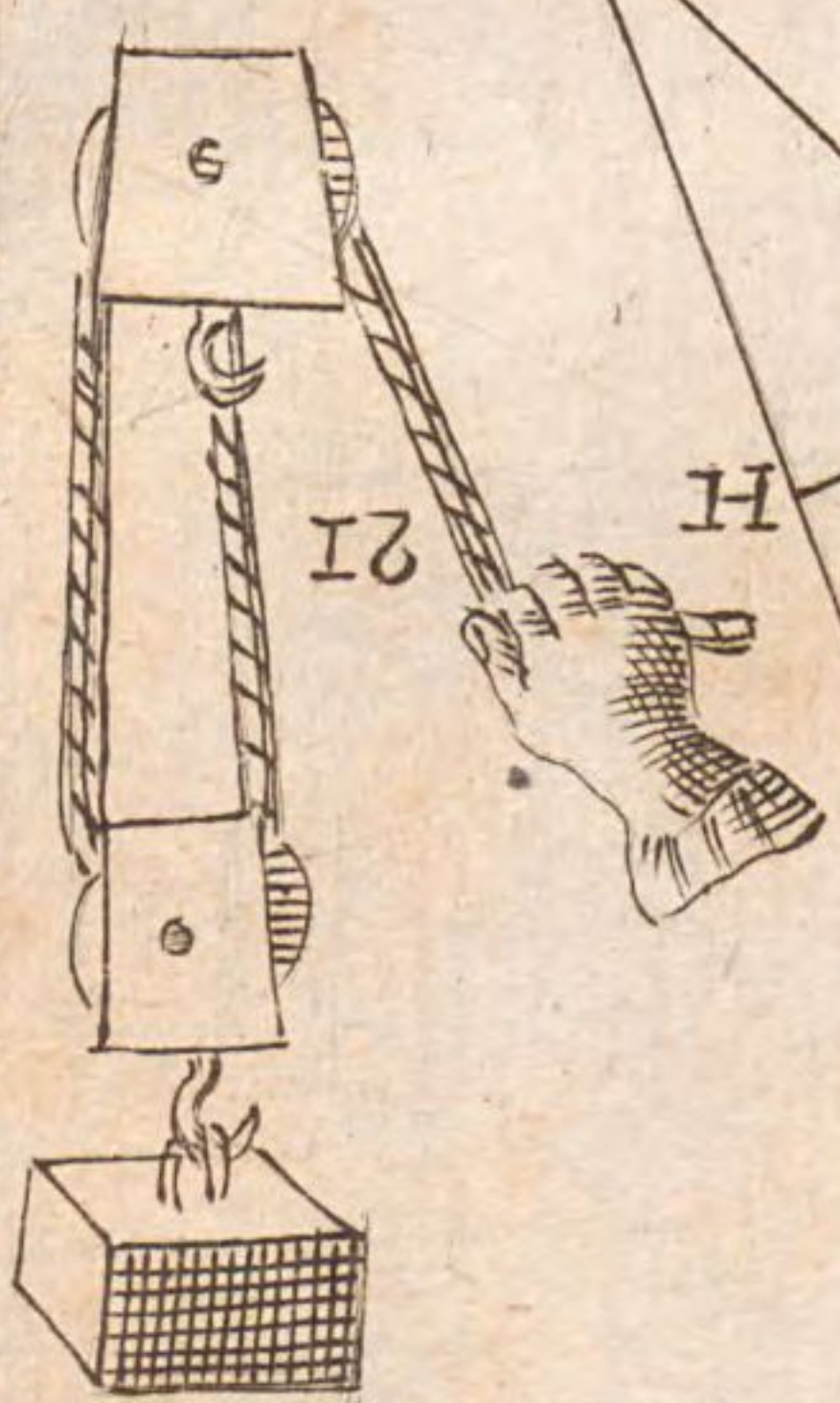
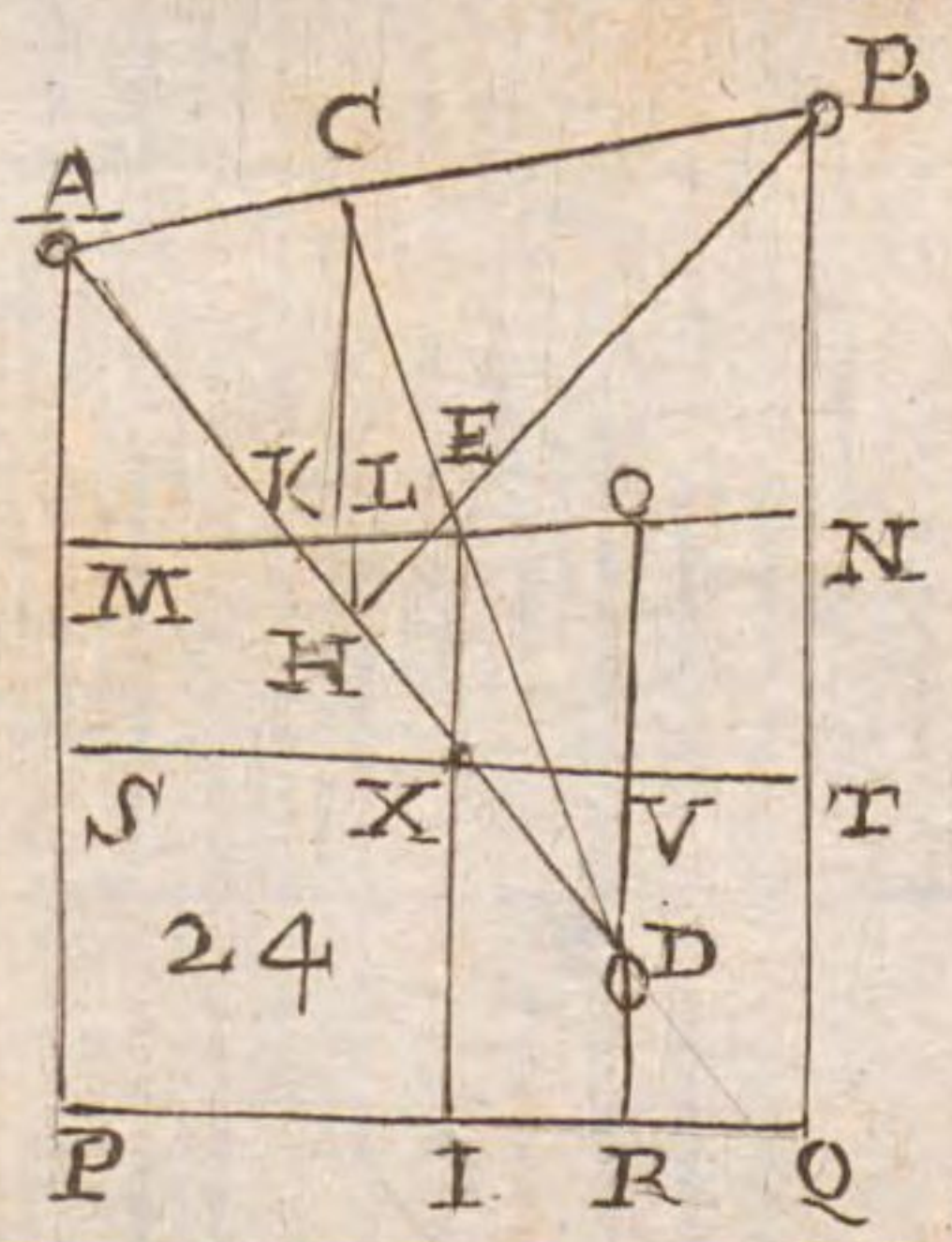
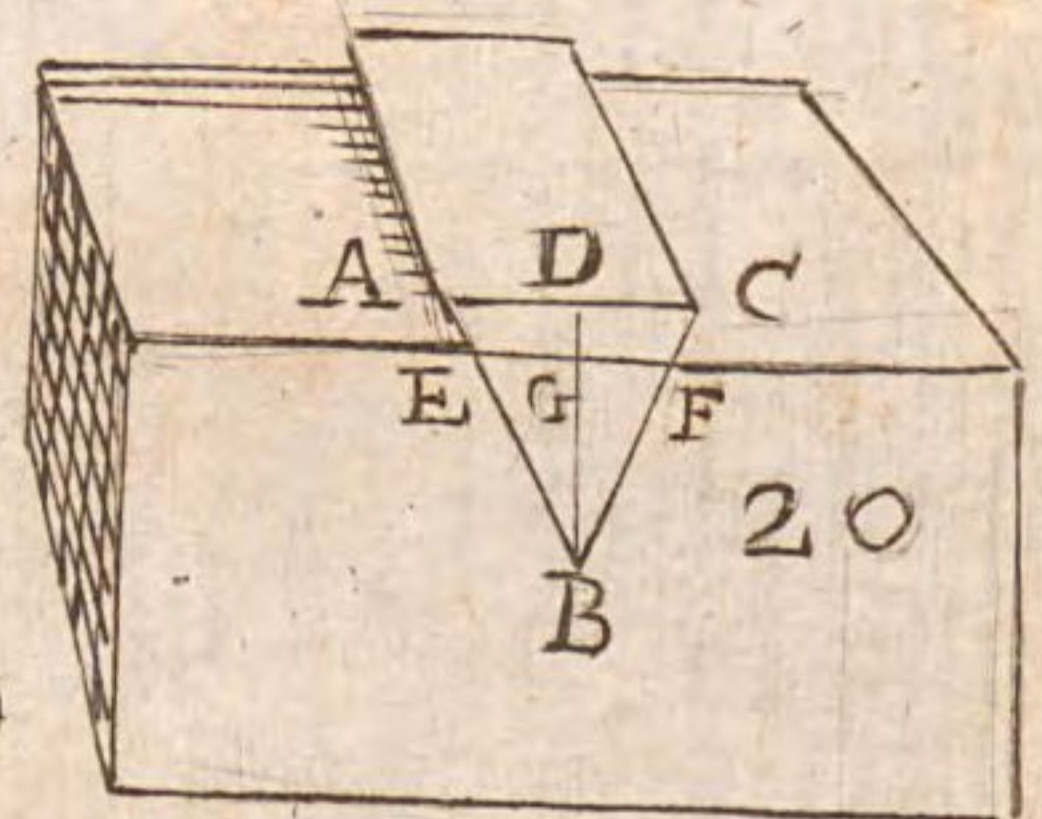
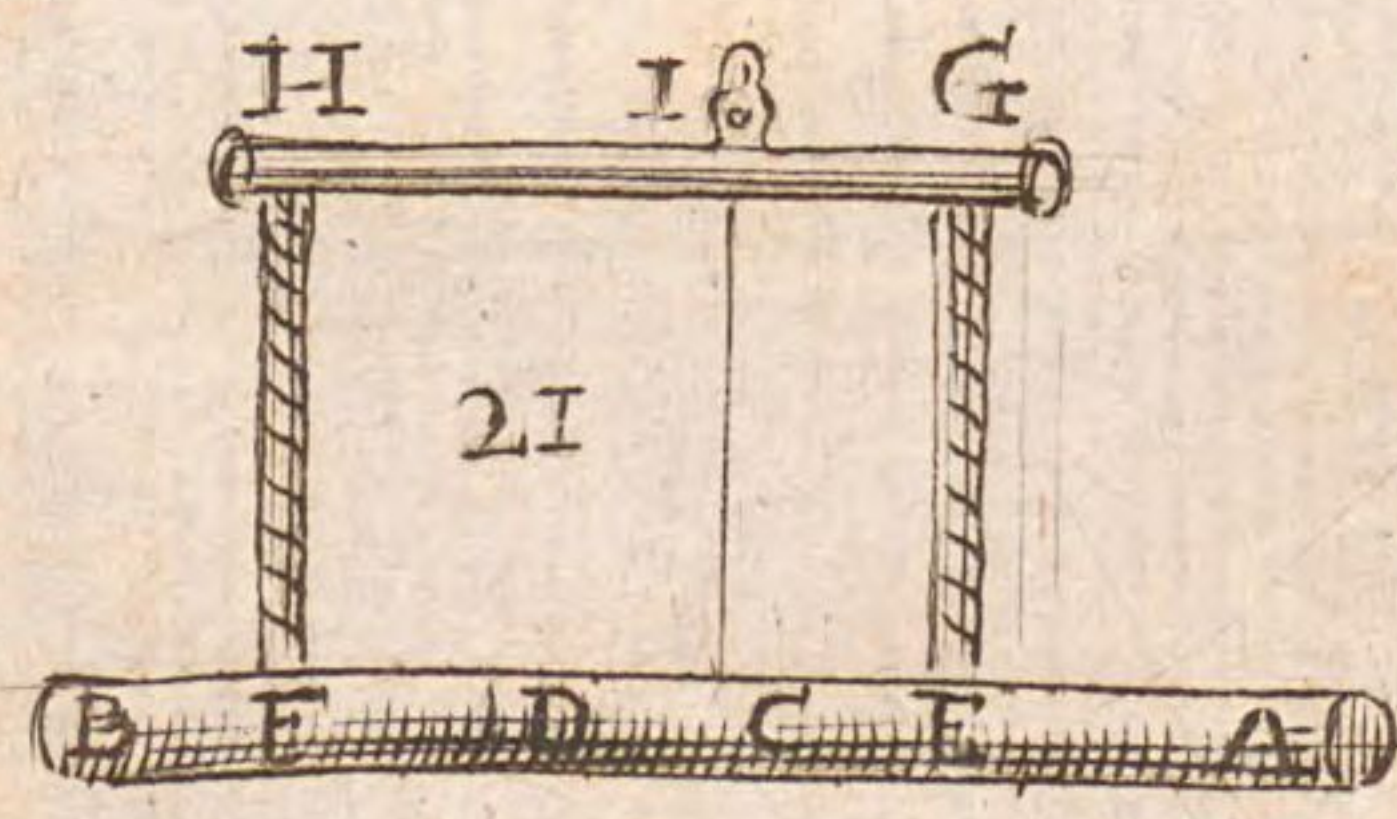
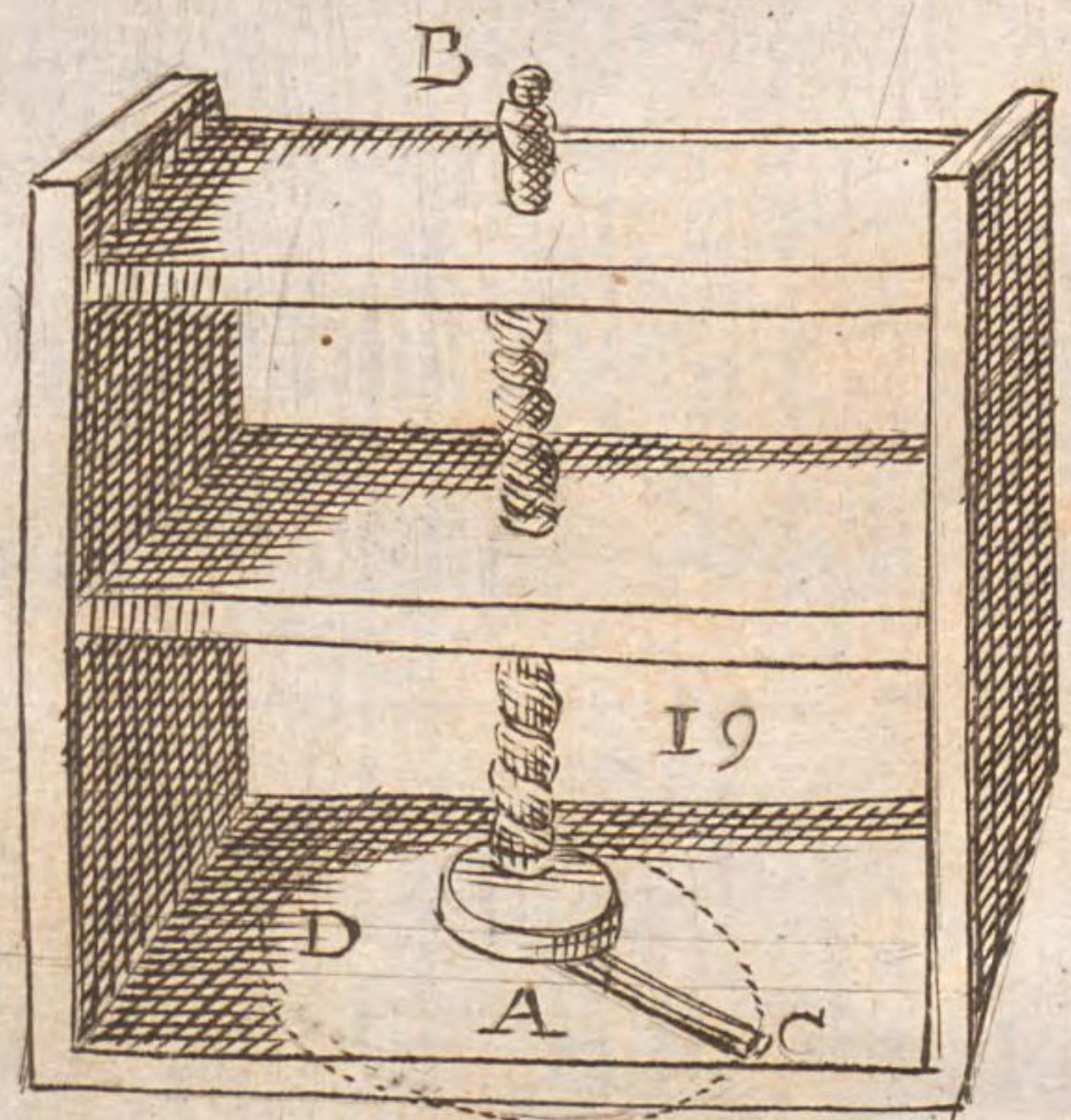
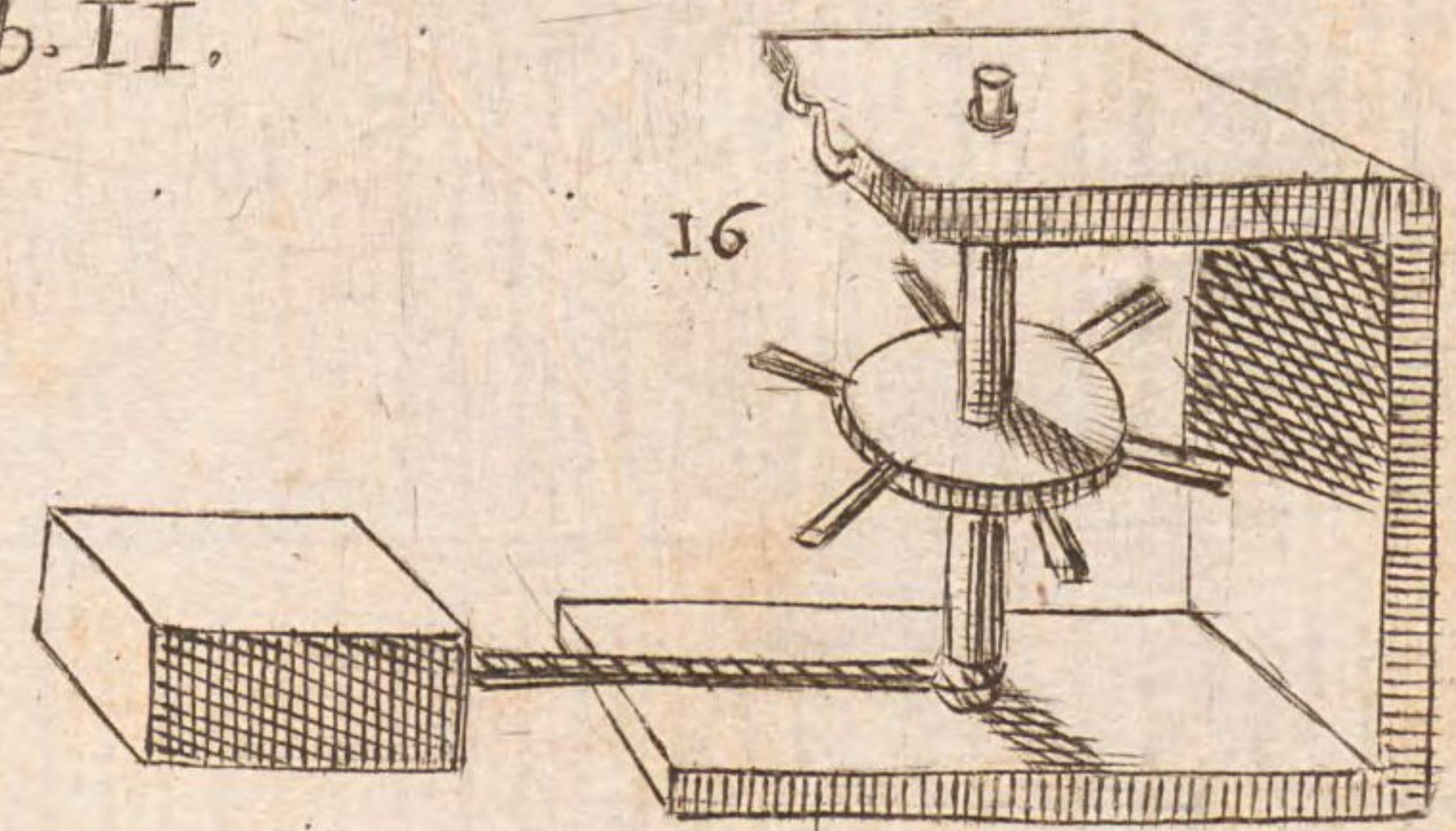
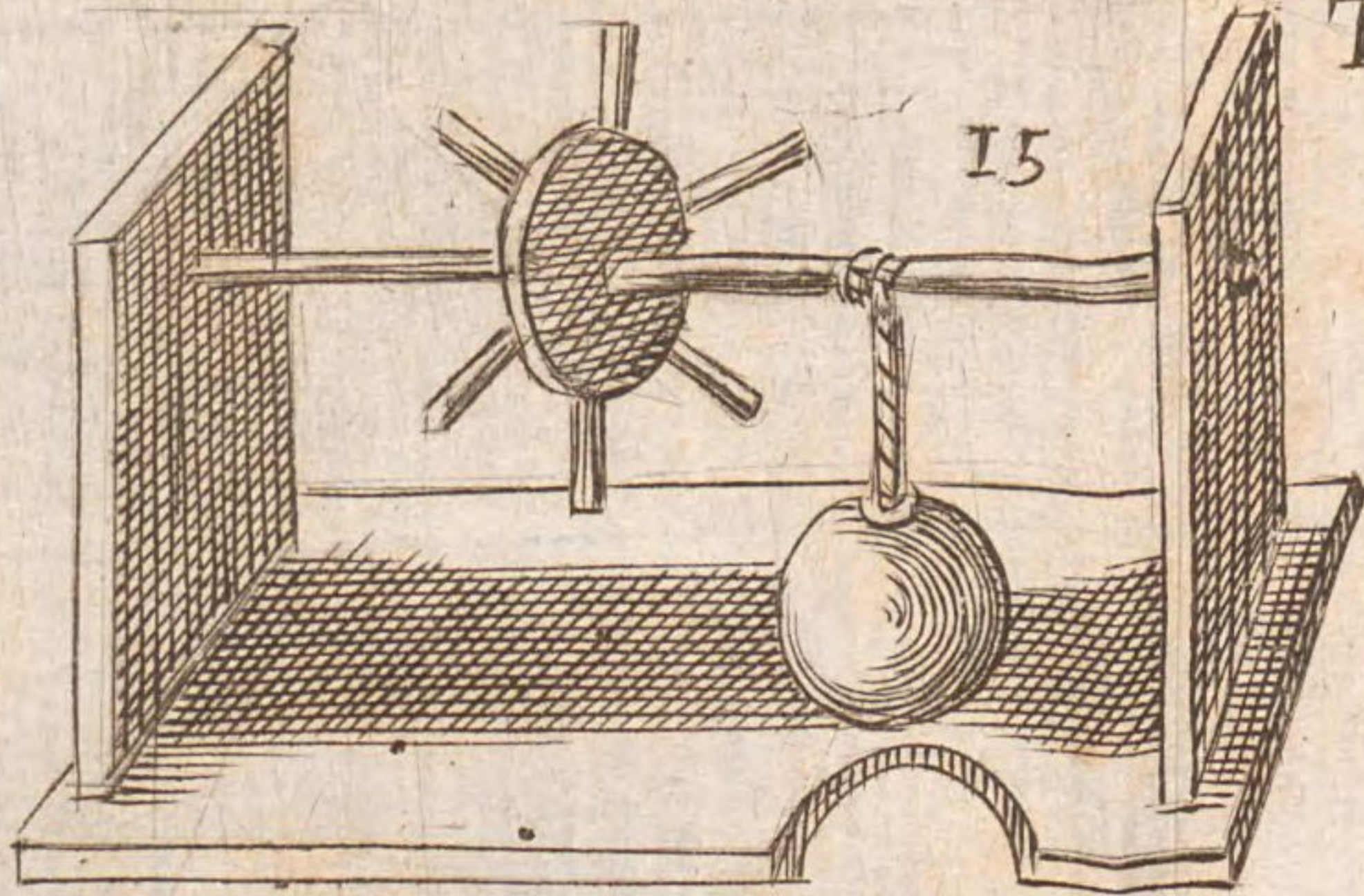
F I N I S.

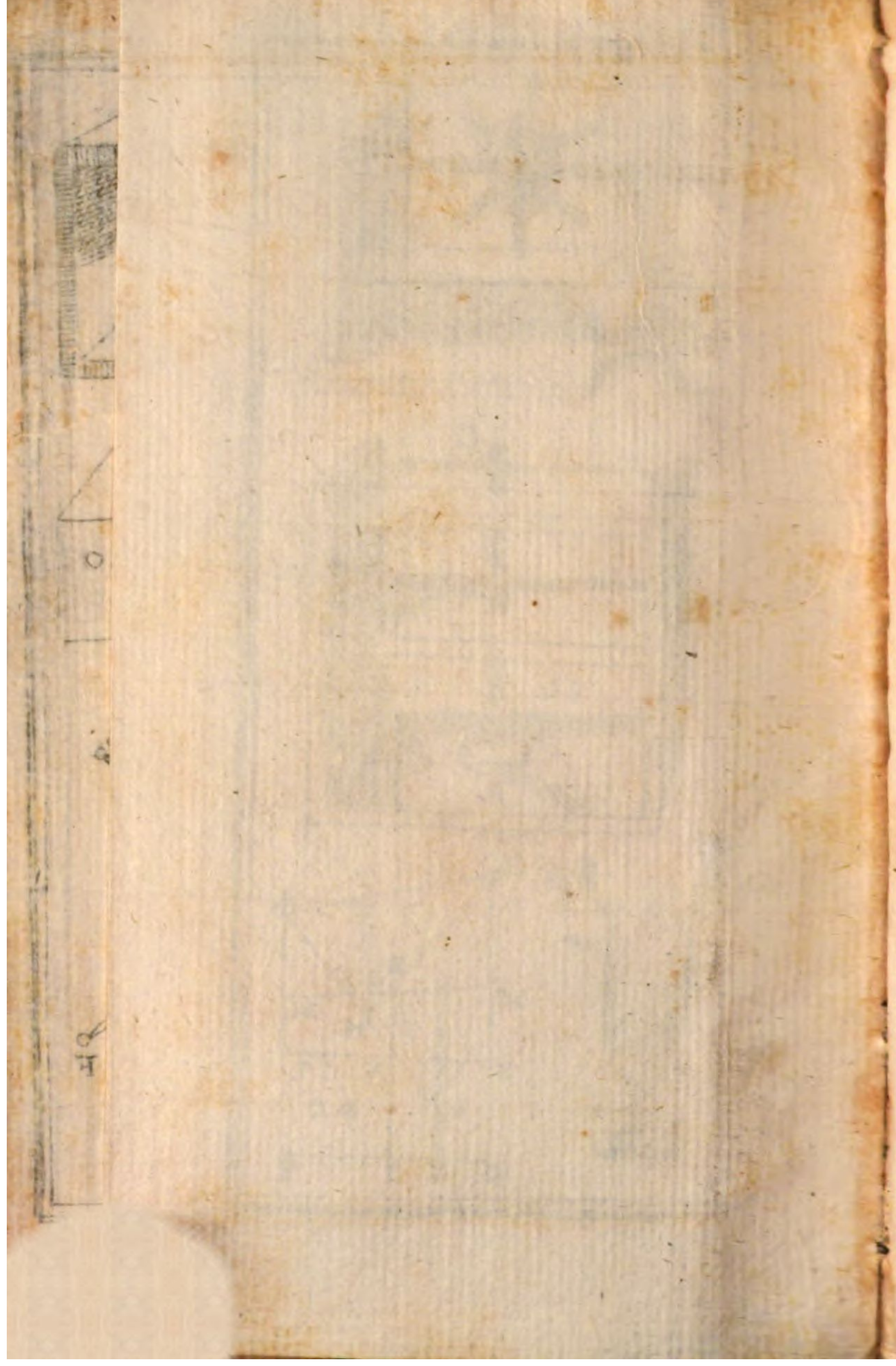
Tab. I.

Fig. I

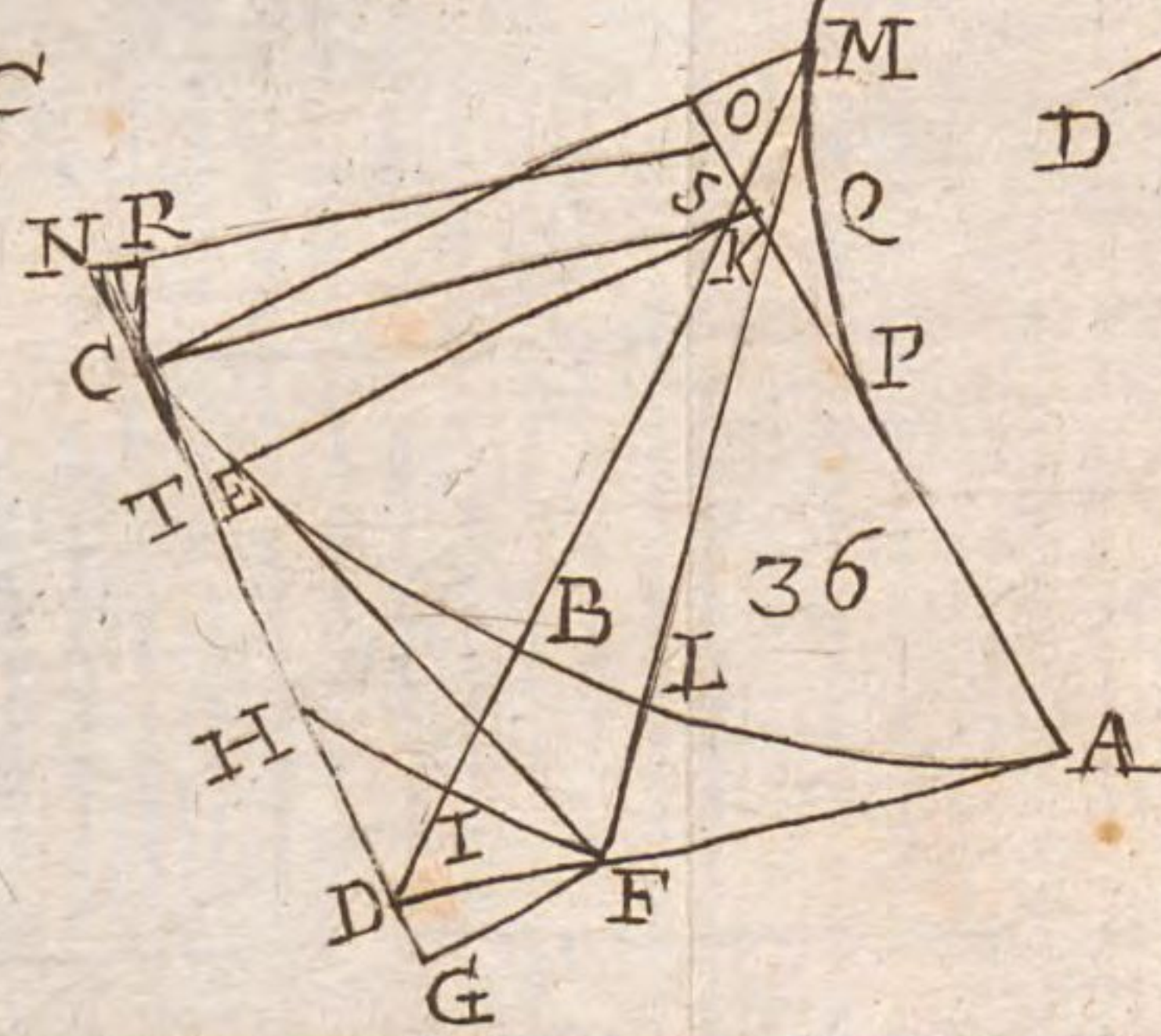
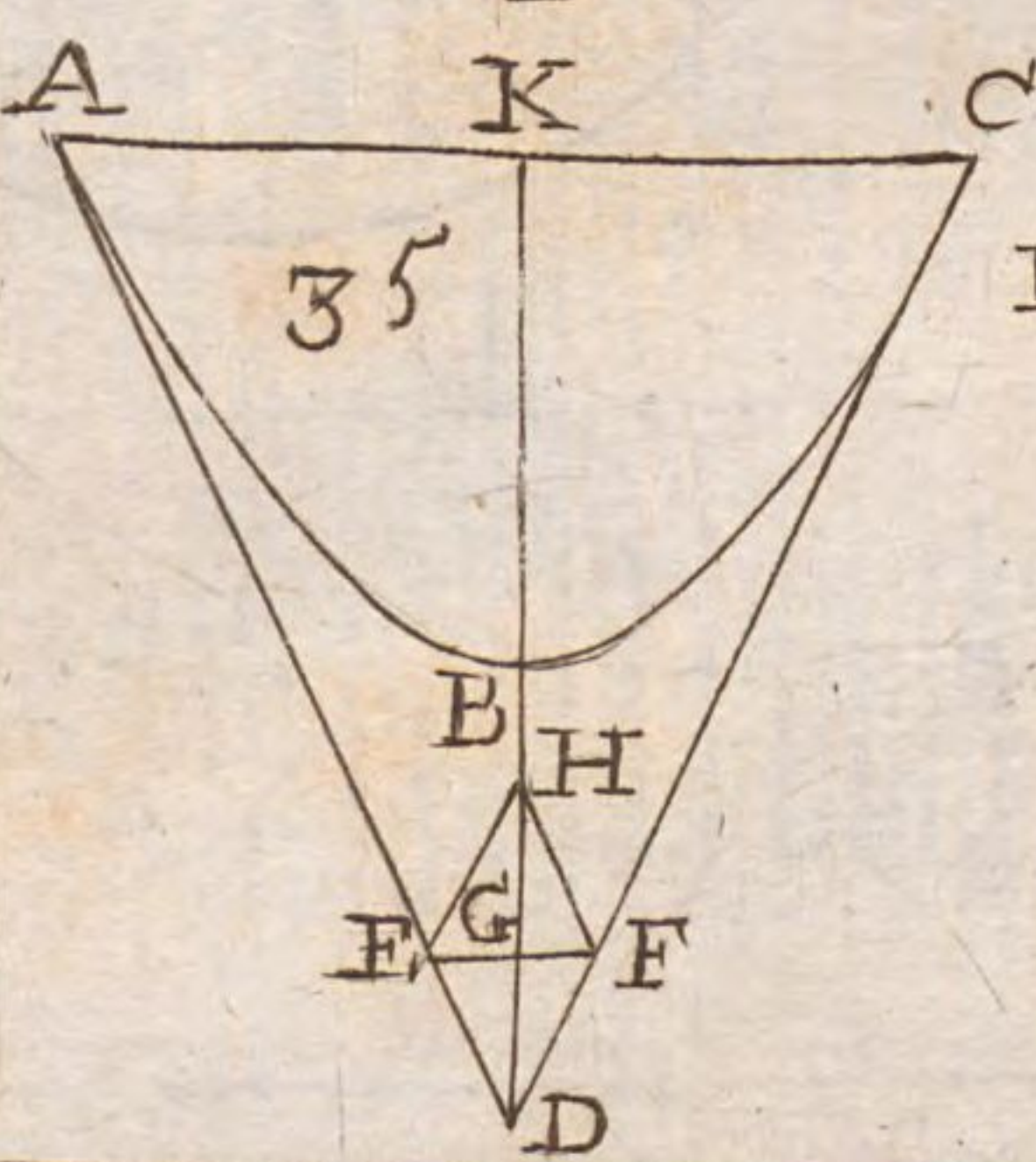
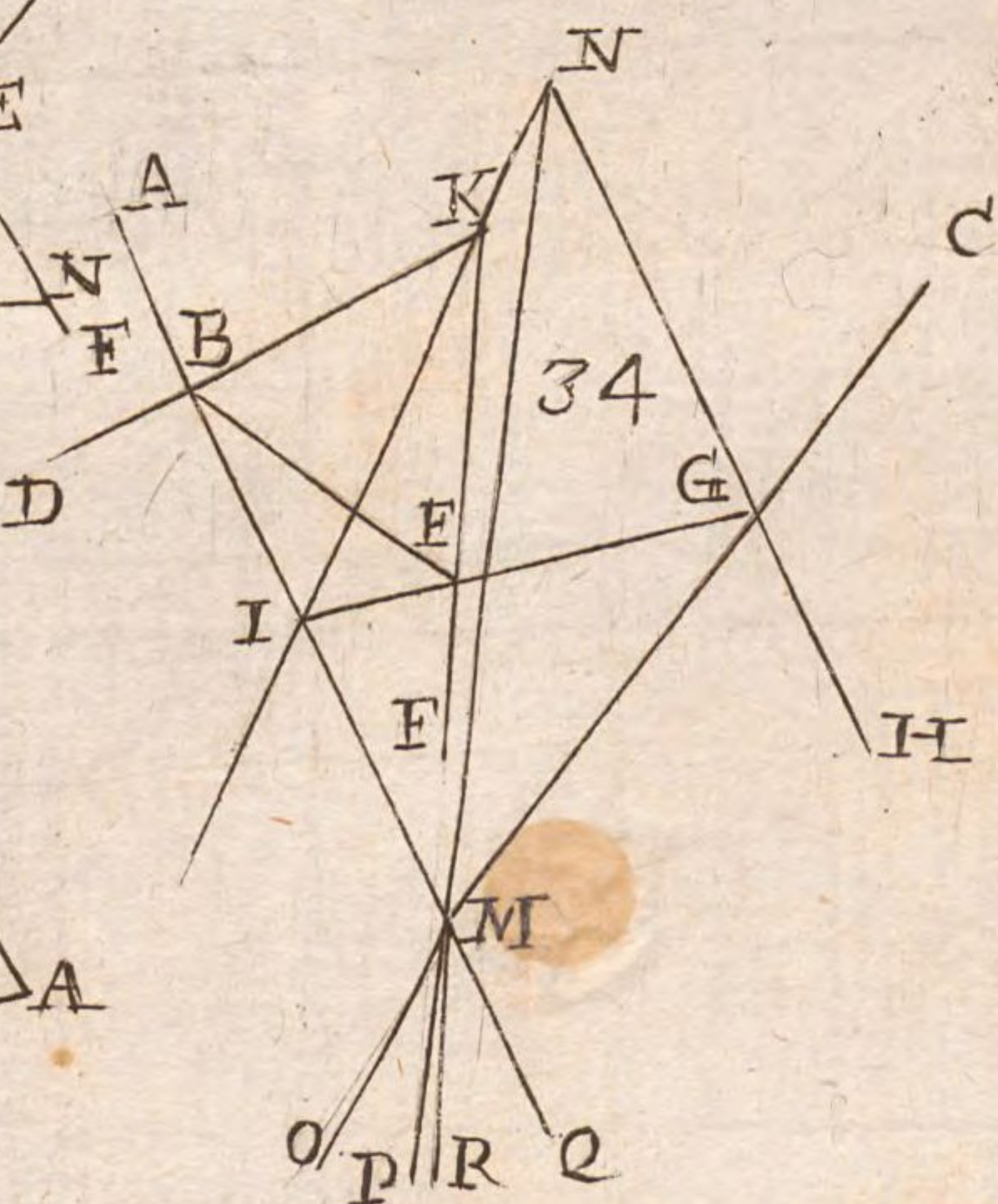
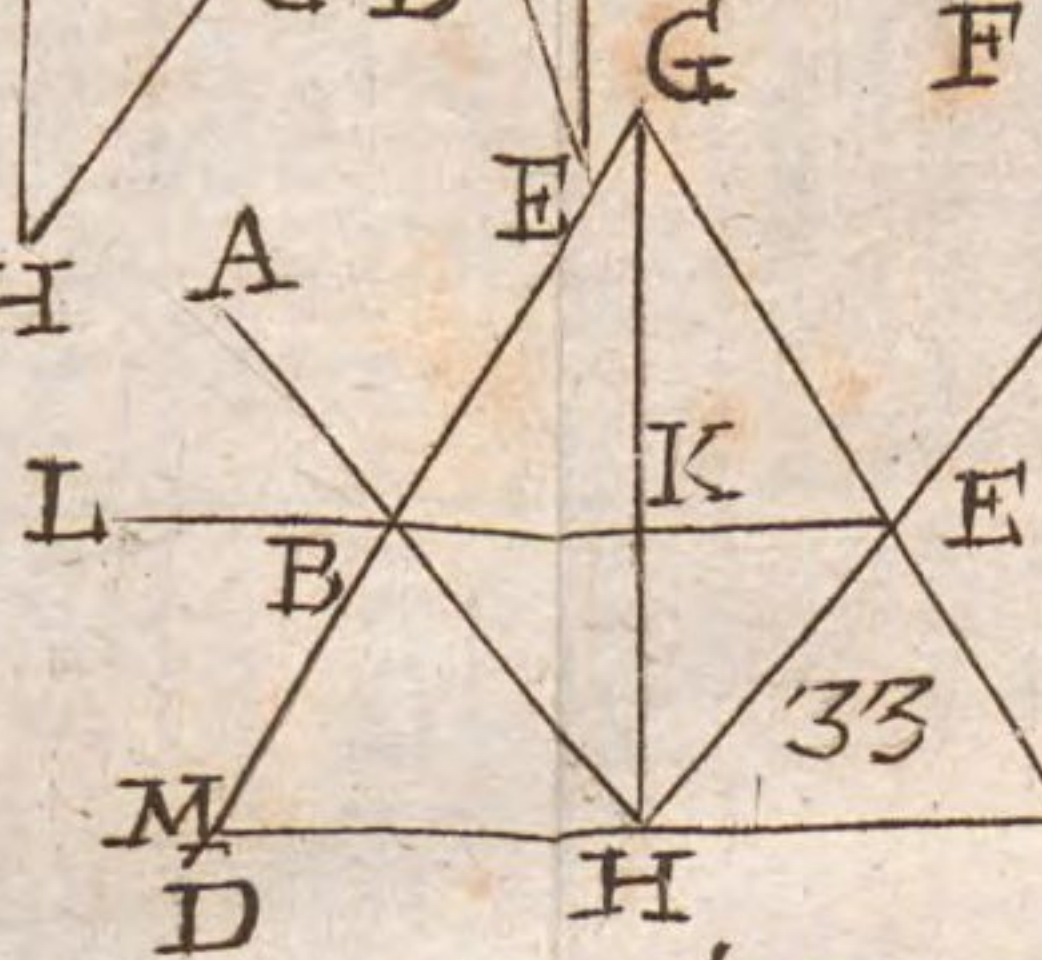
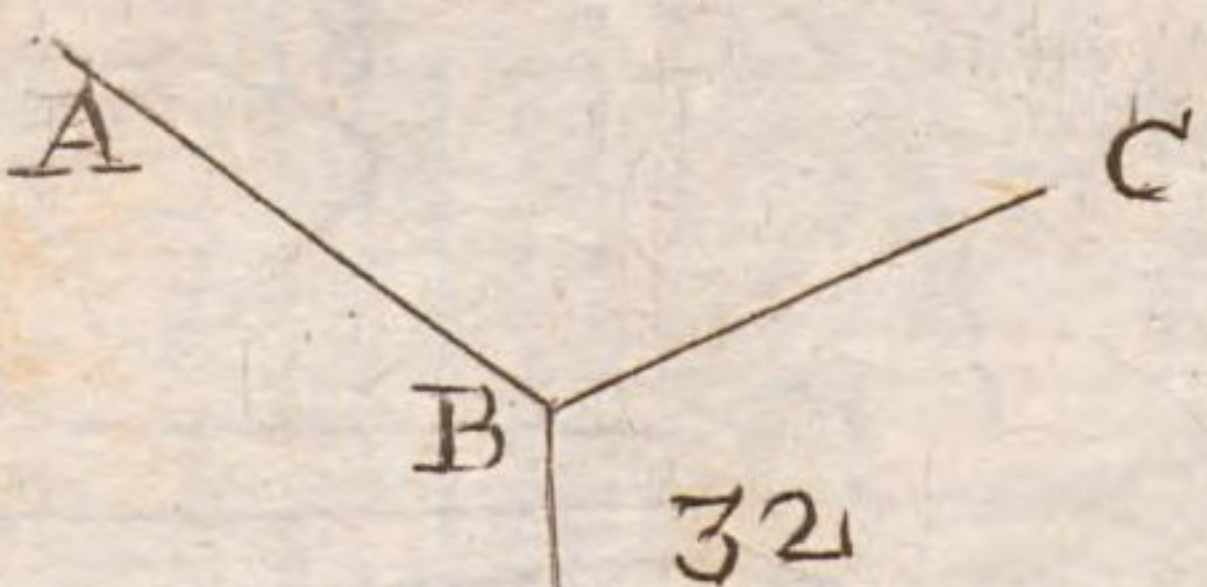
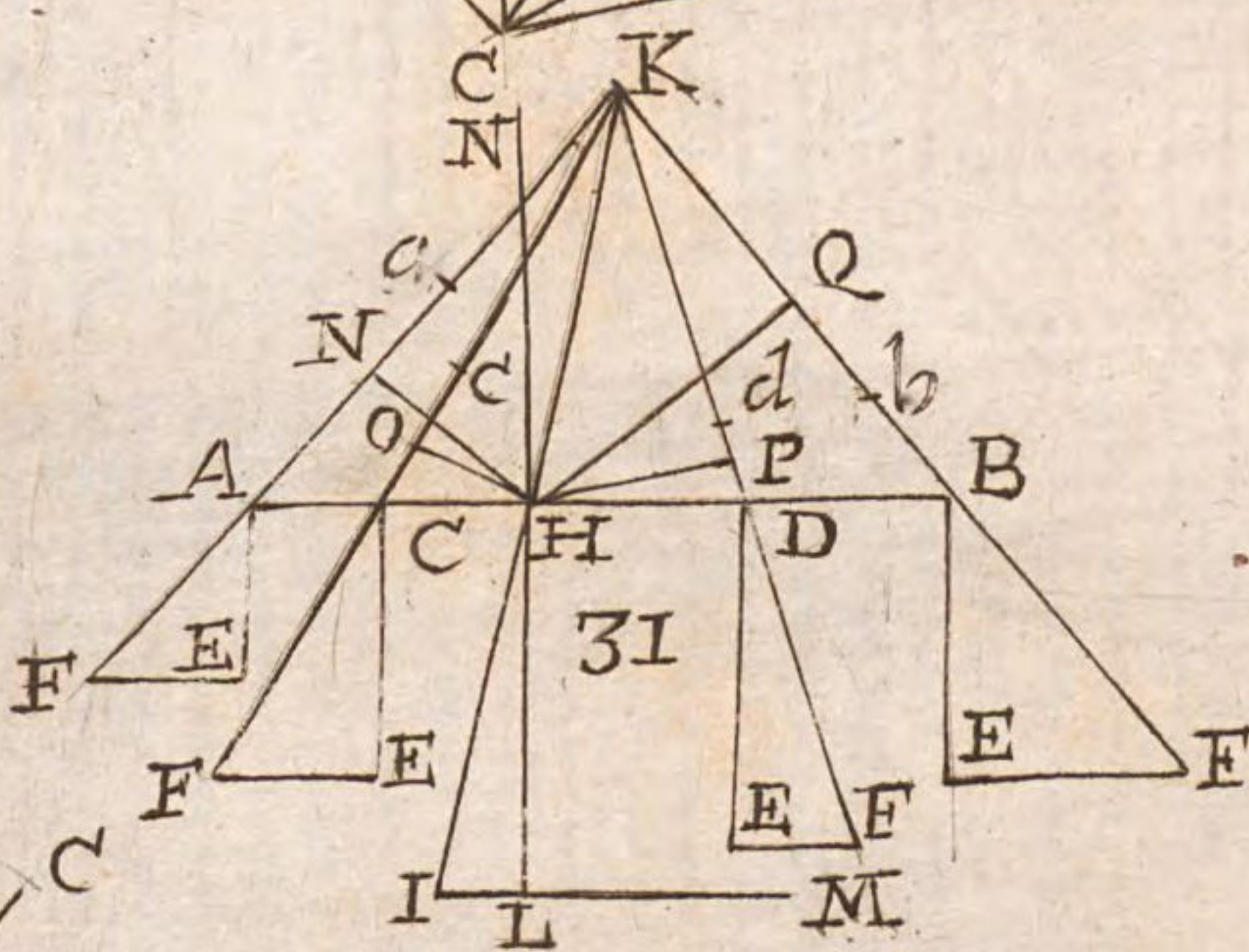
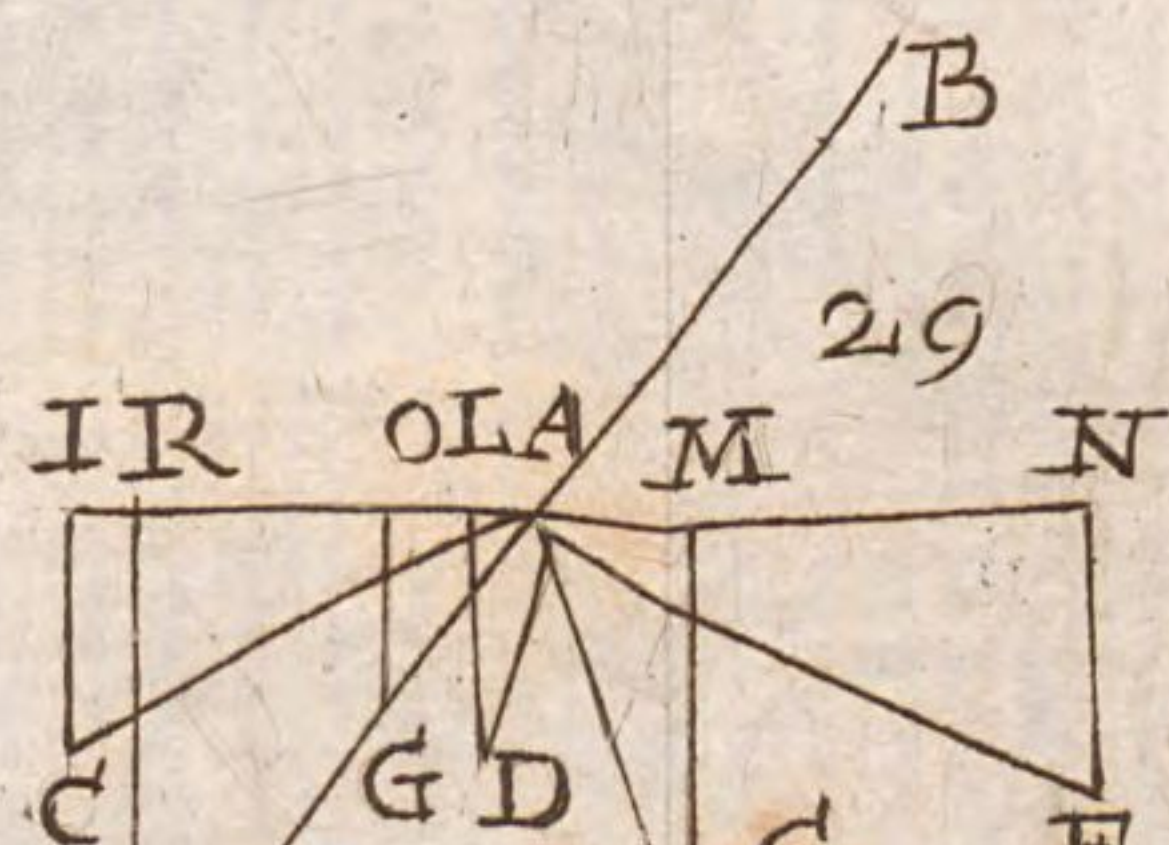
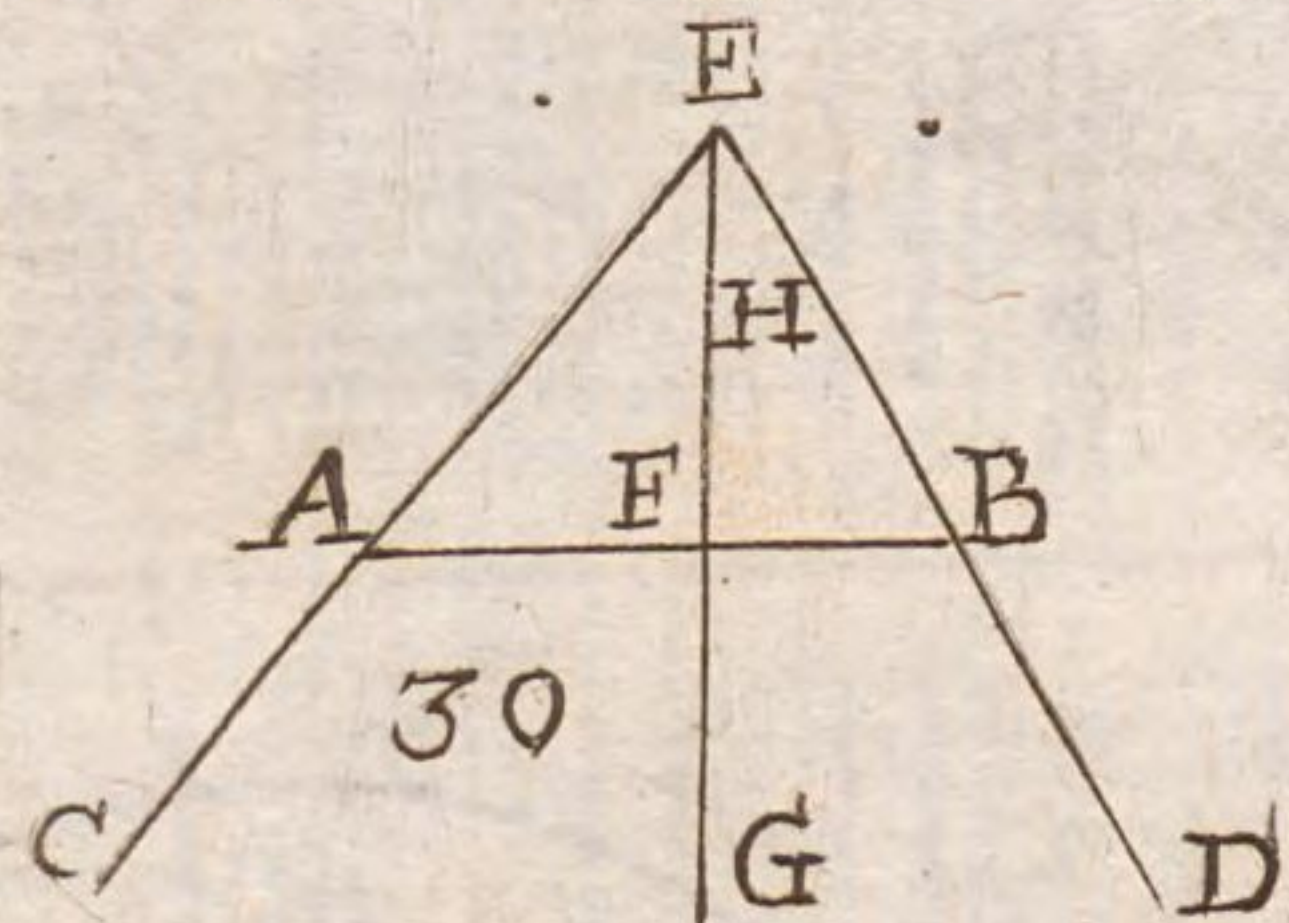
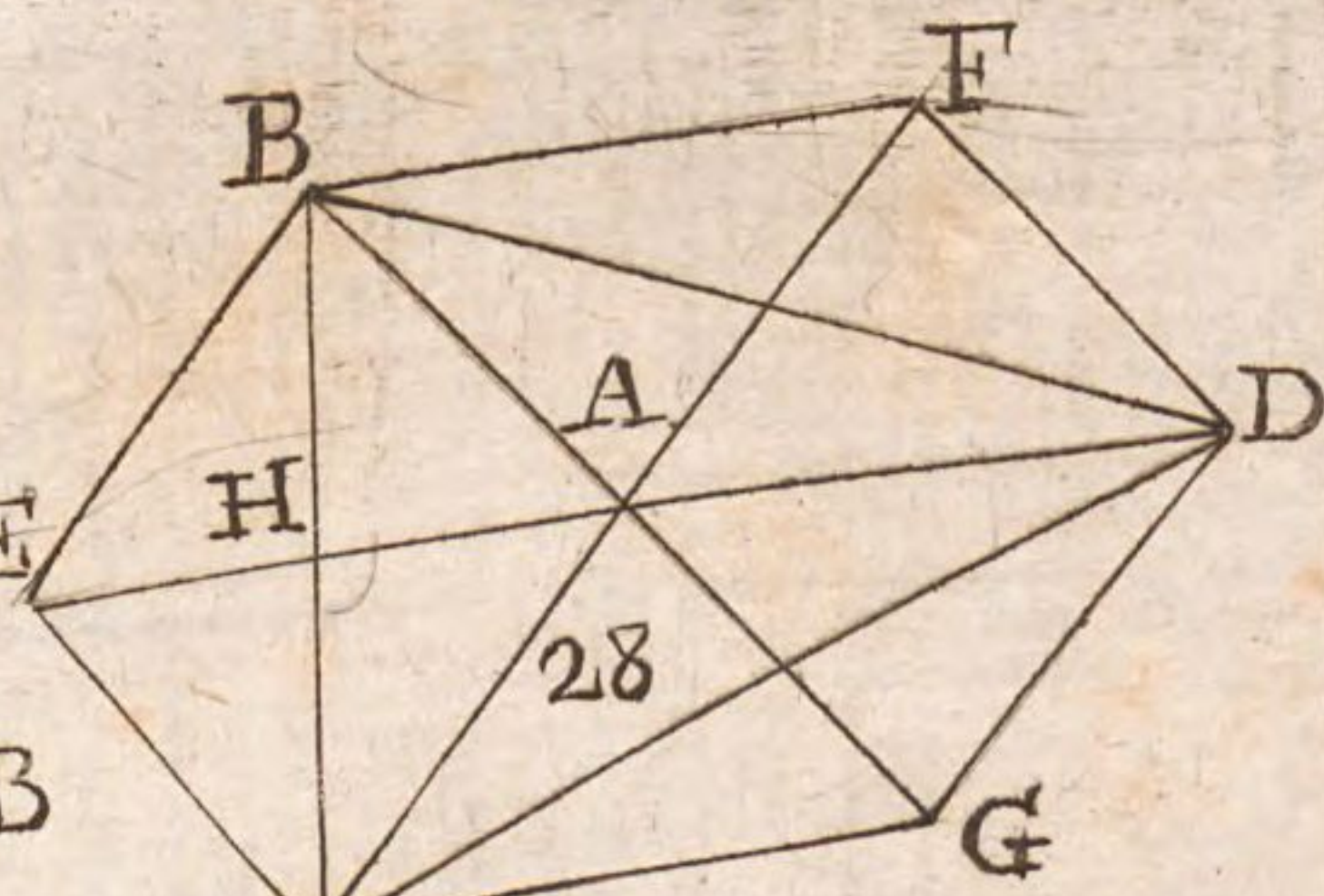
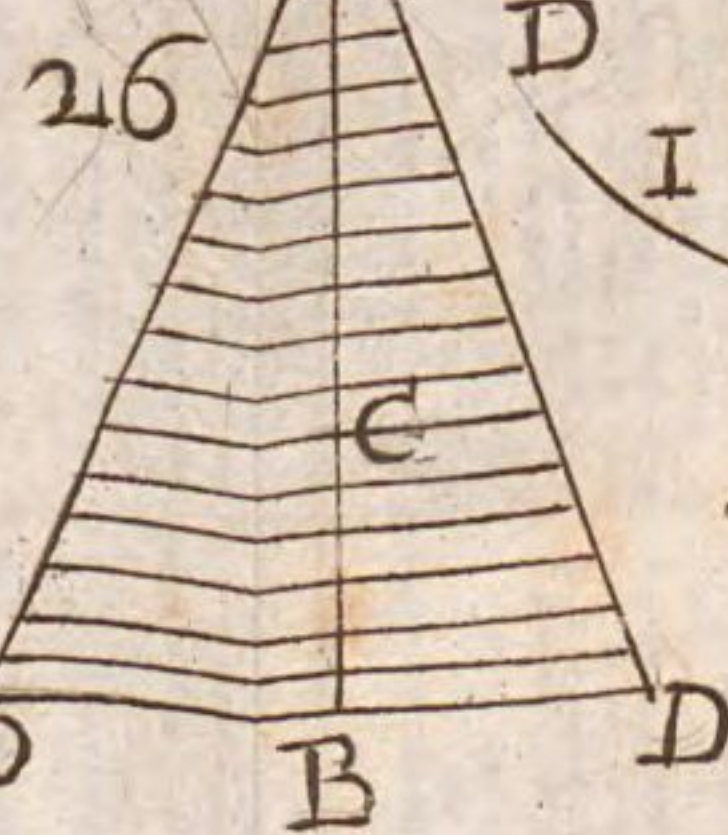
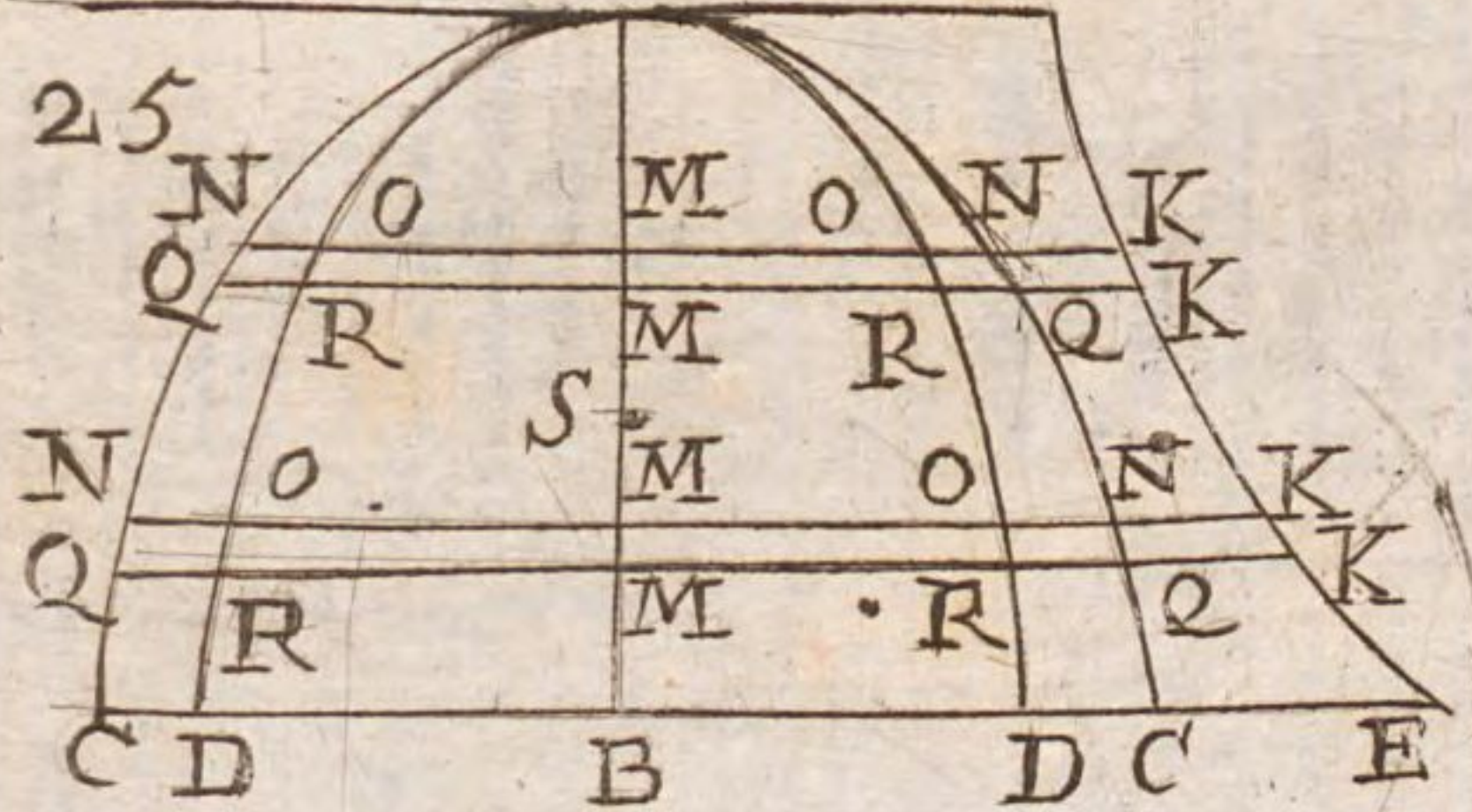


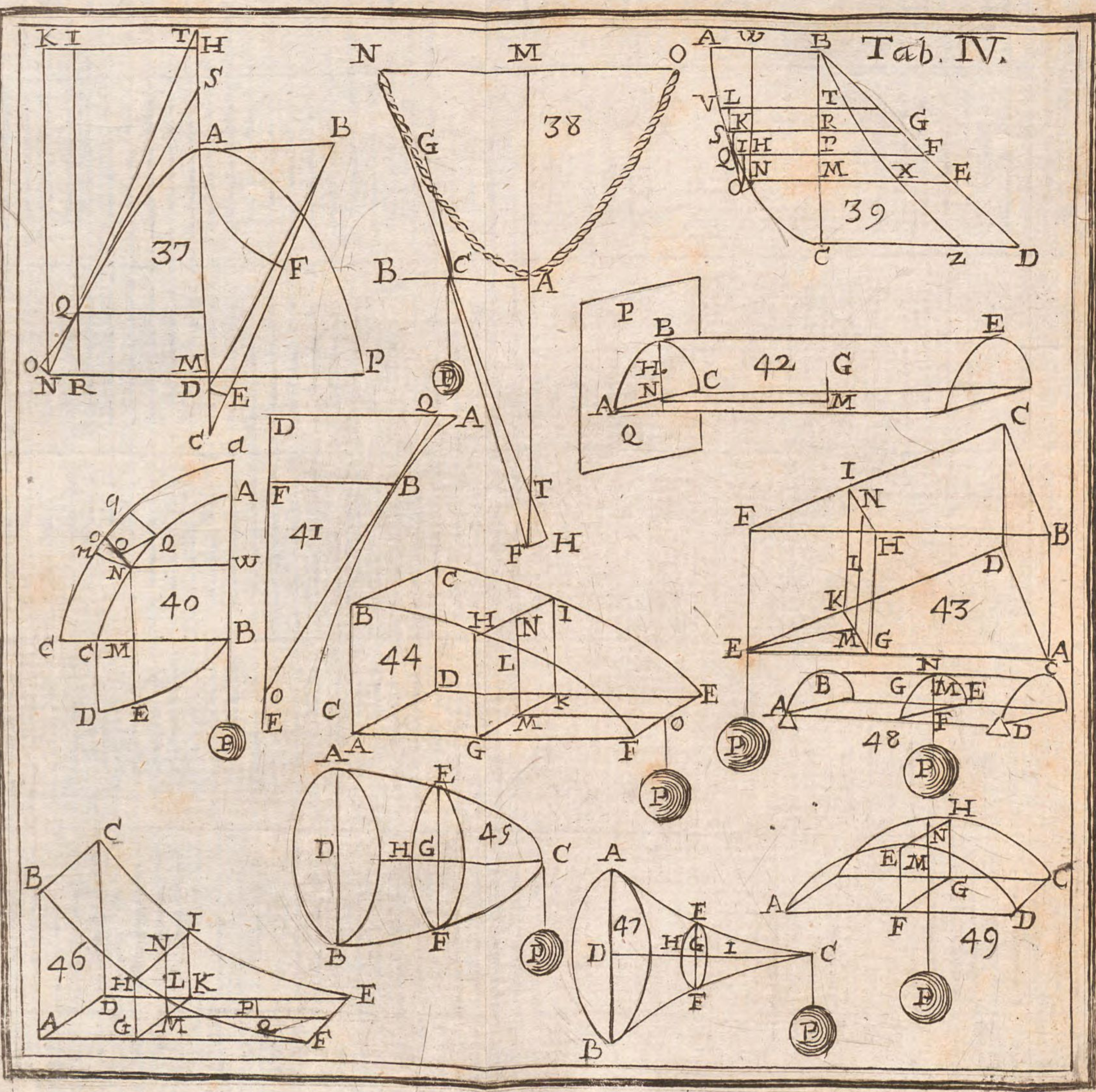
Tab. II.





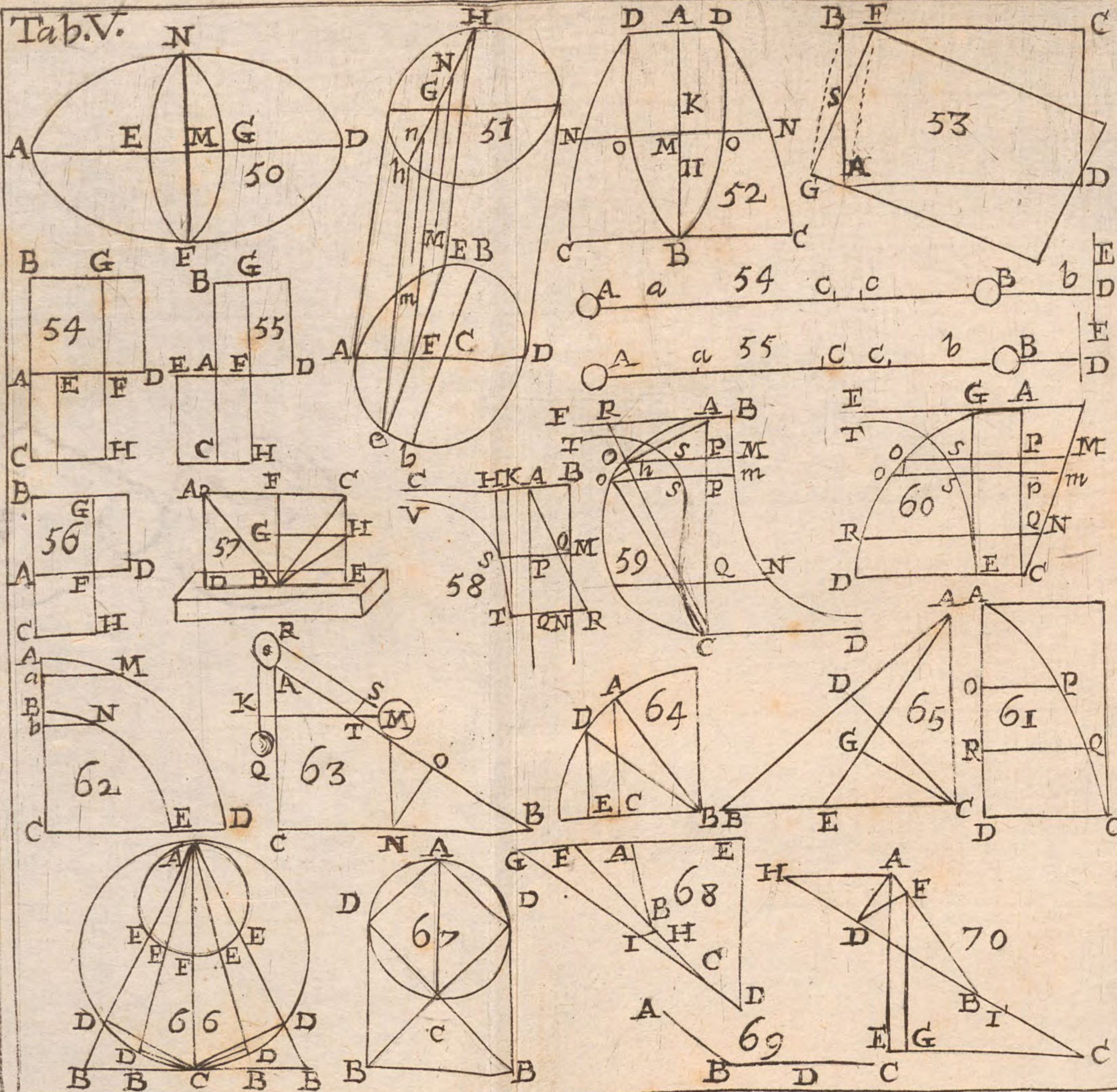
H A F Tab III



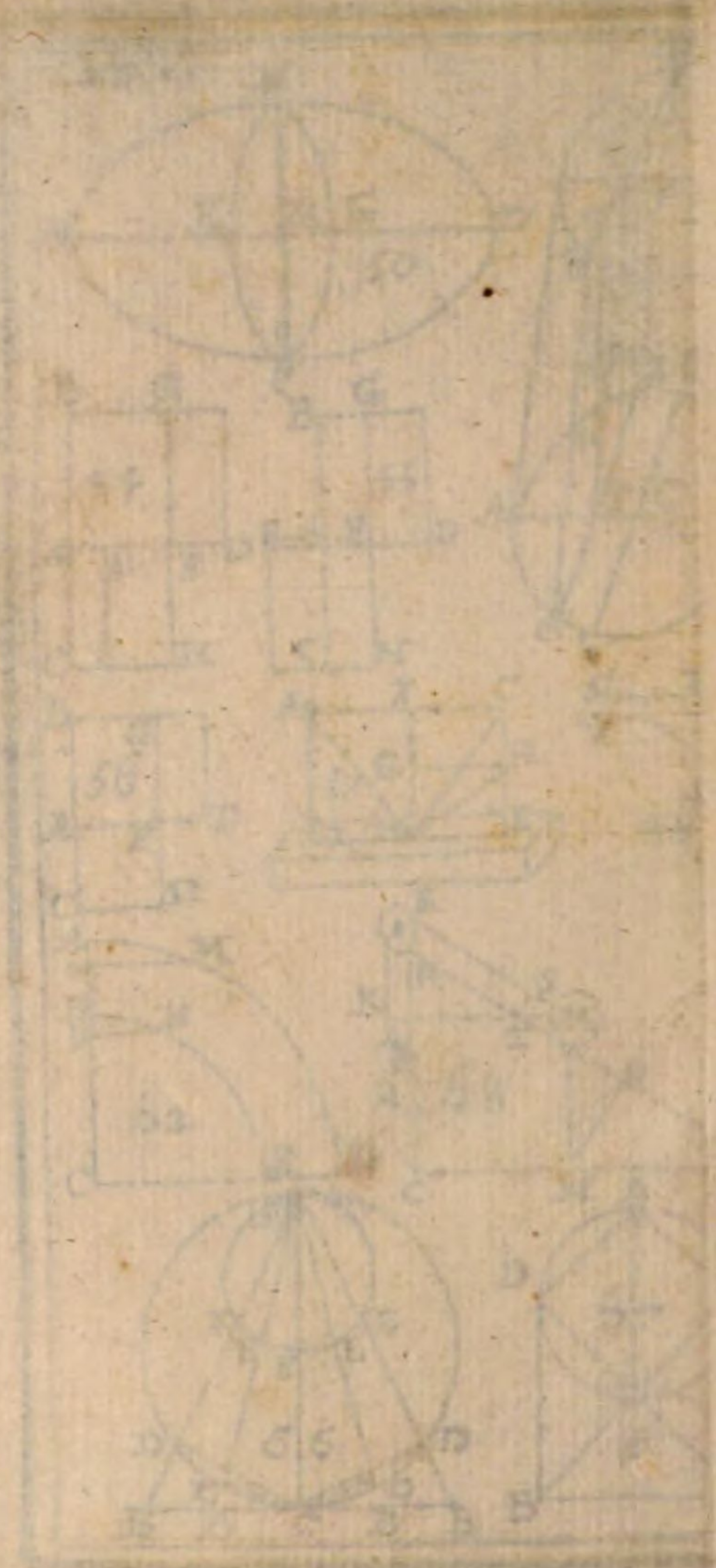




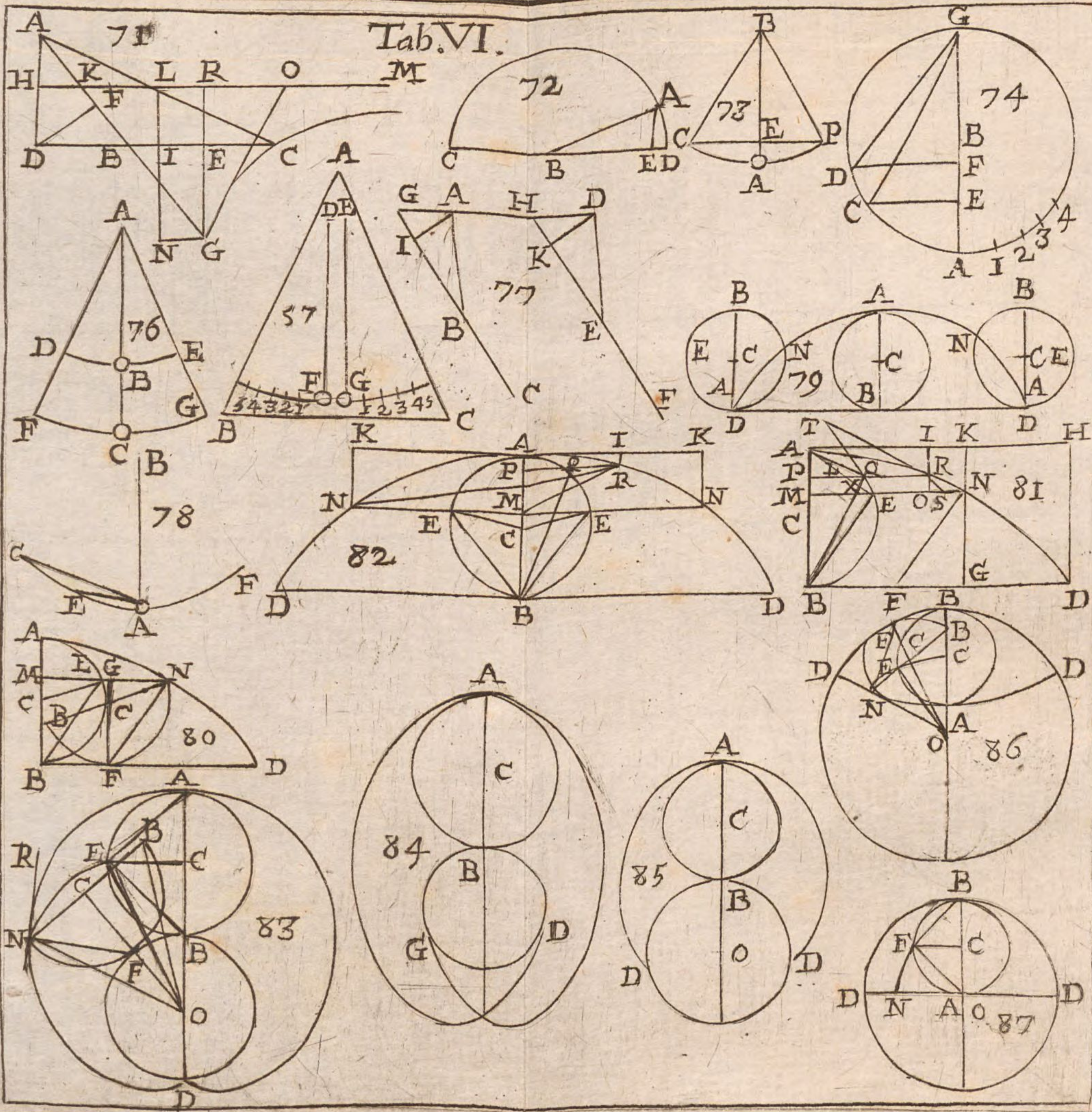
Tab.V.



10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

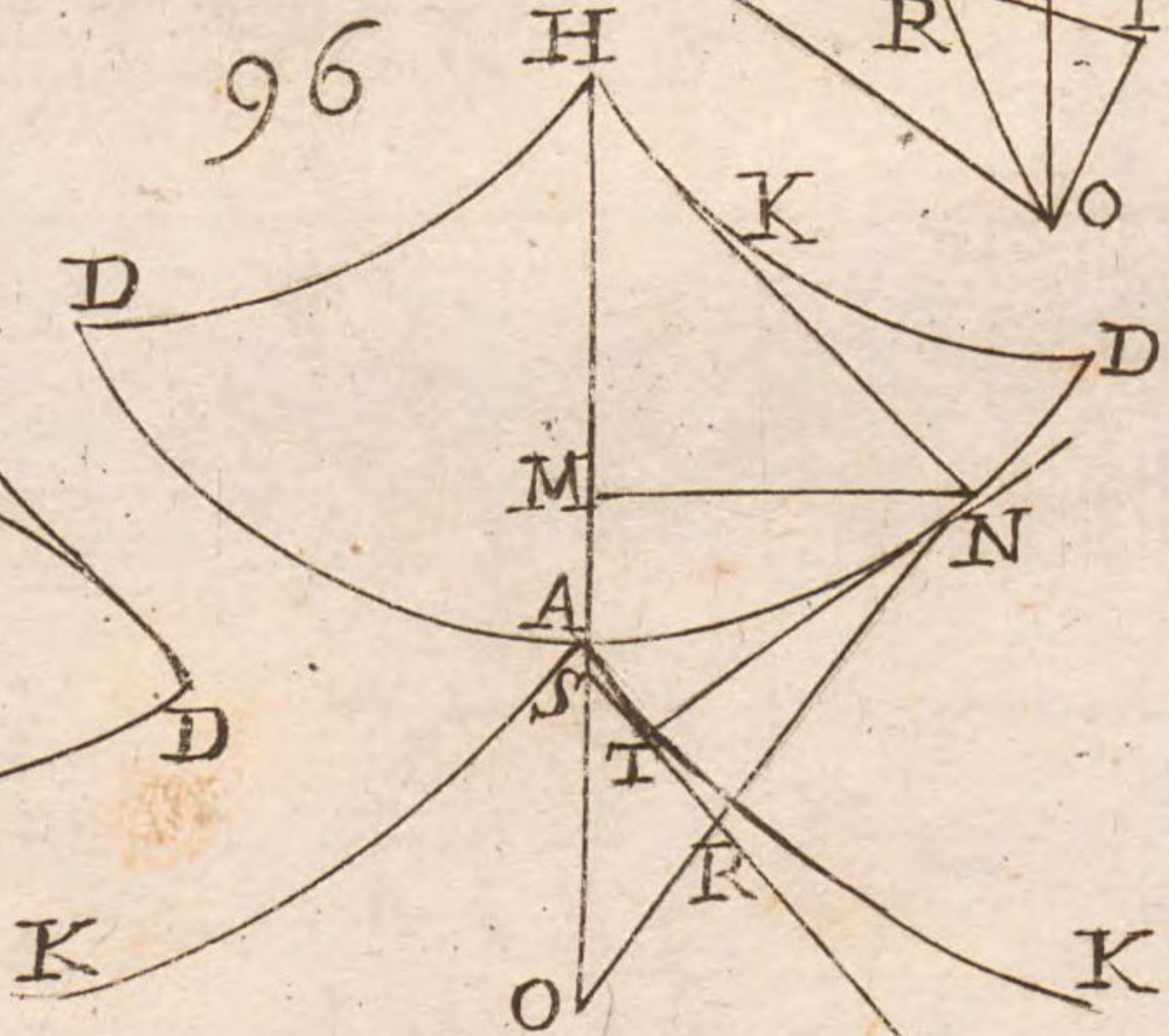
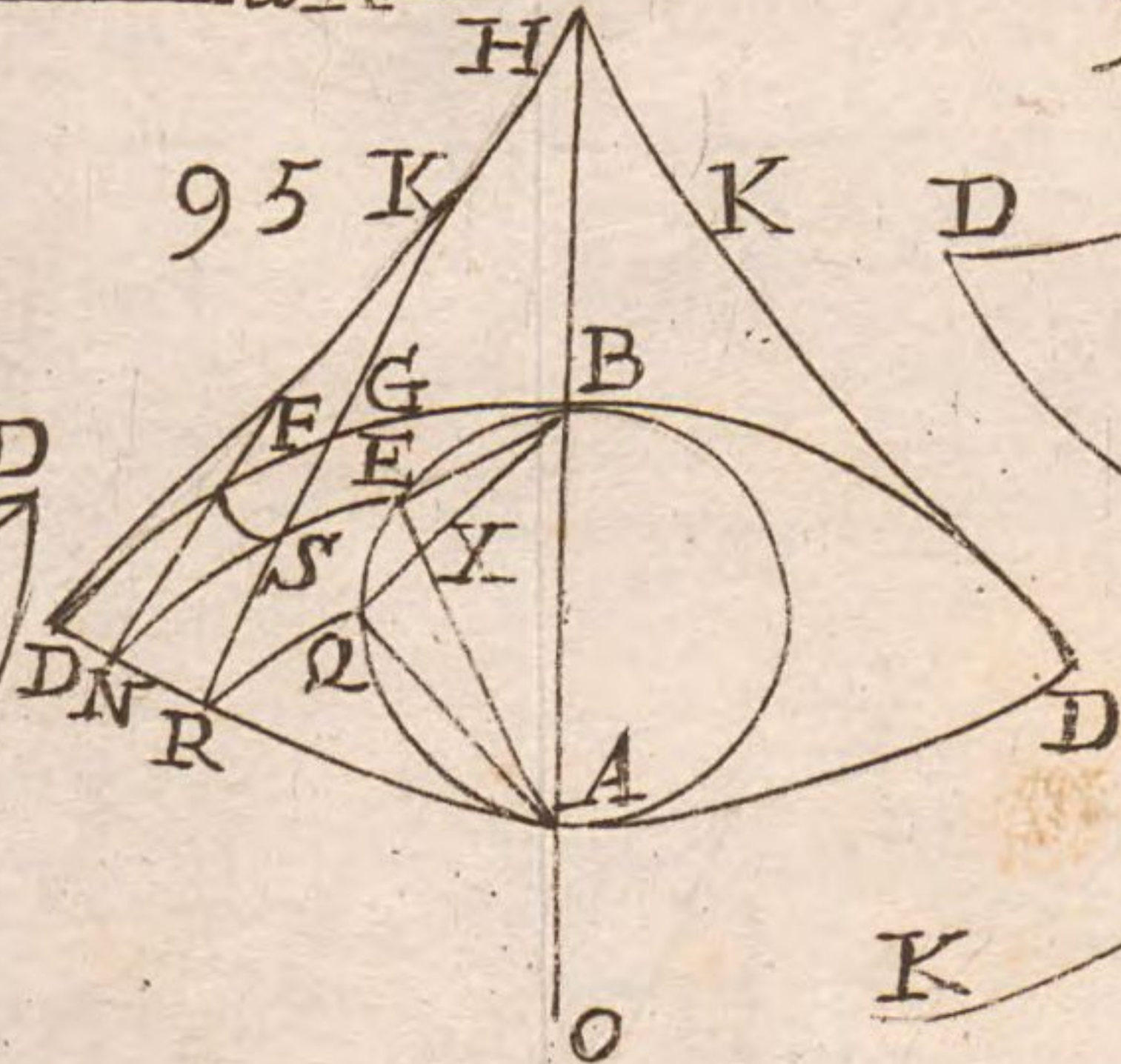
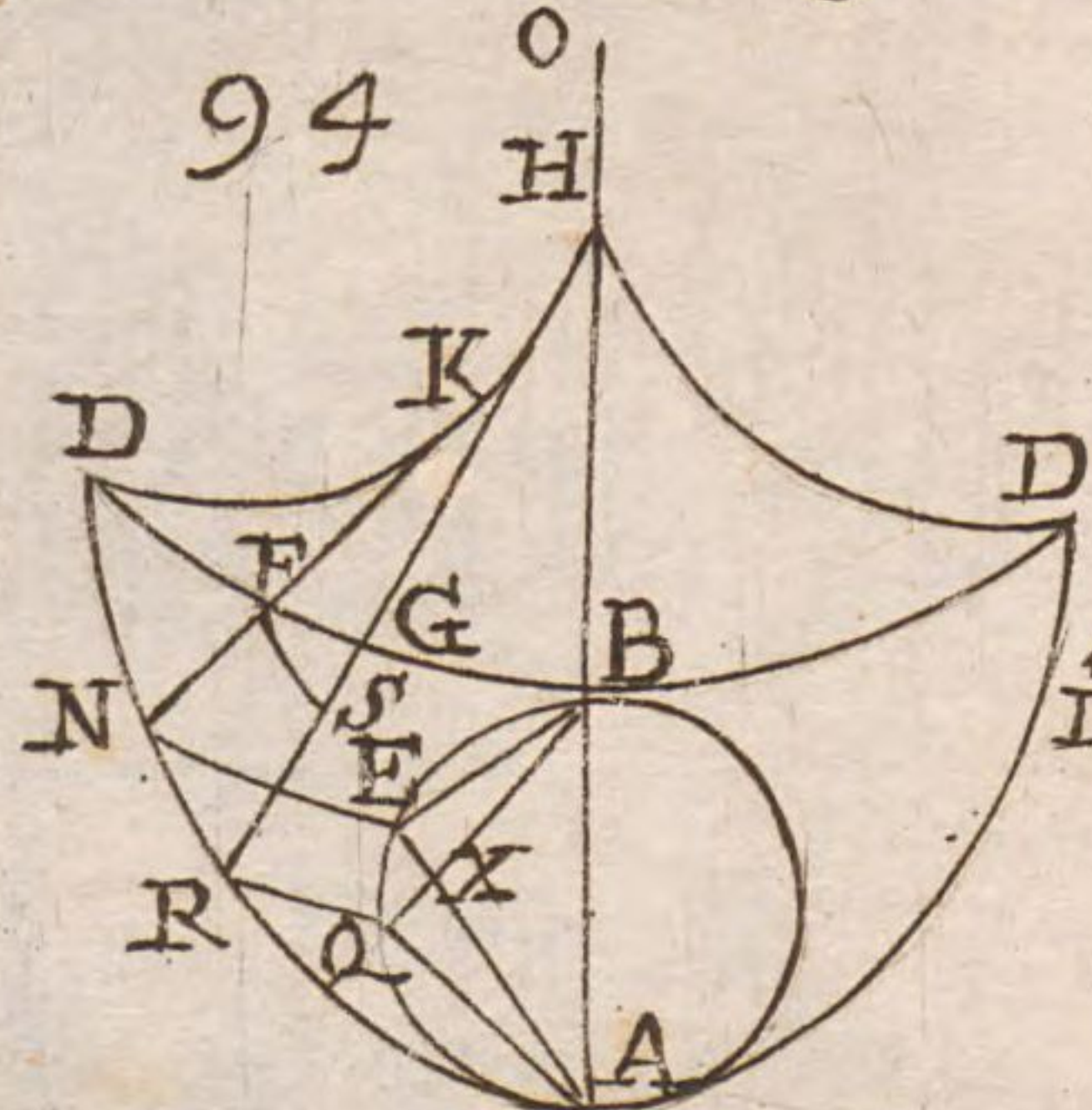
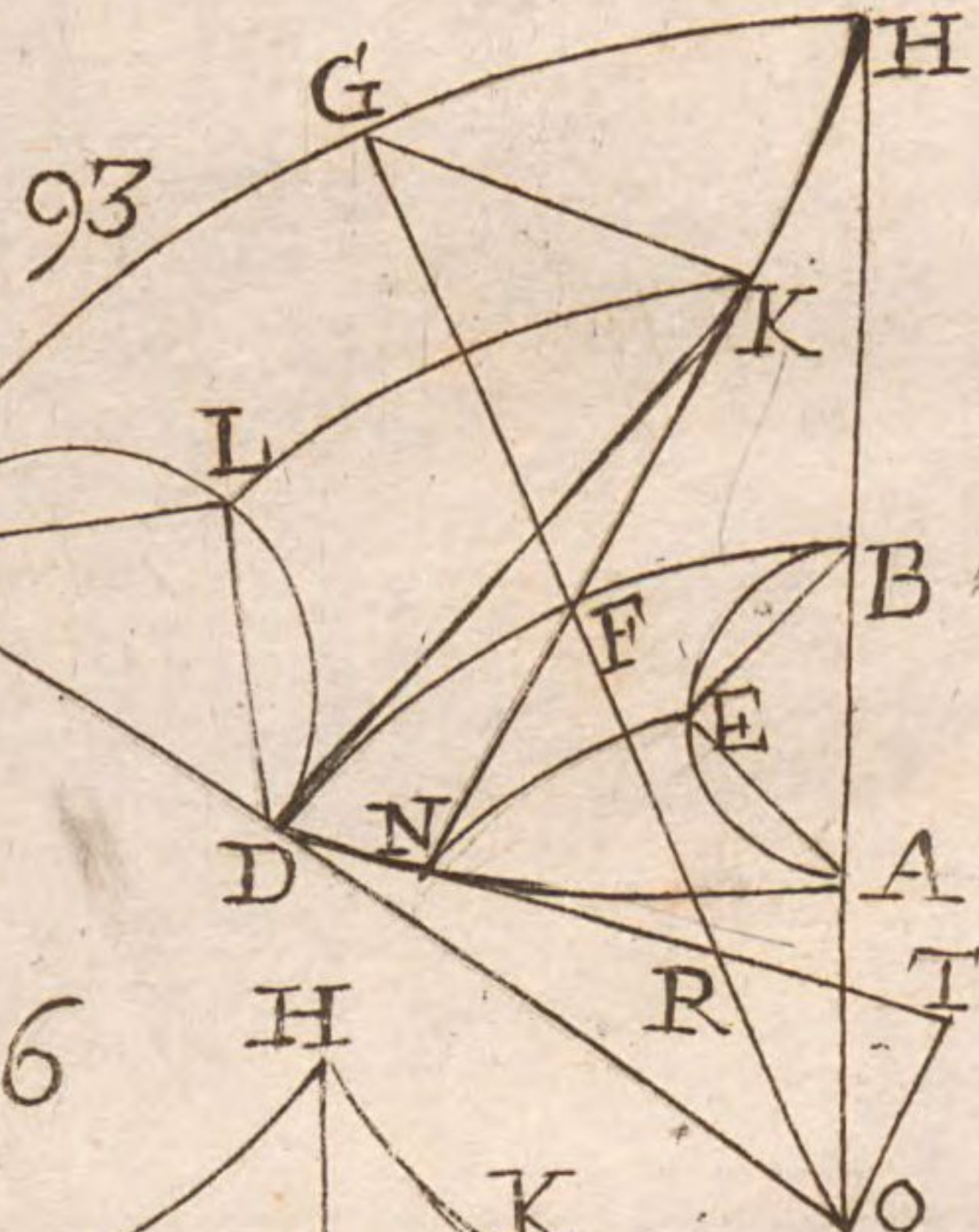
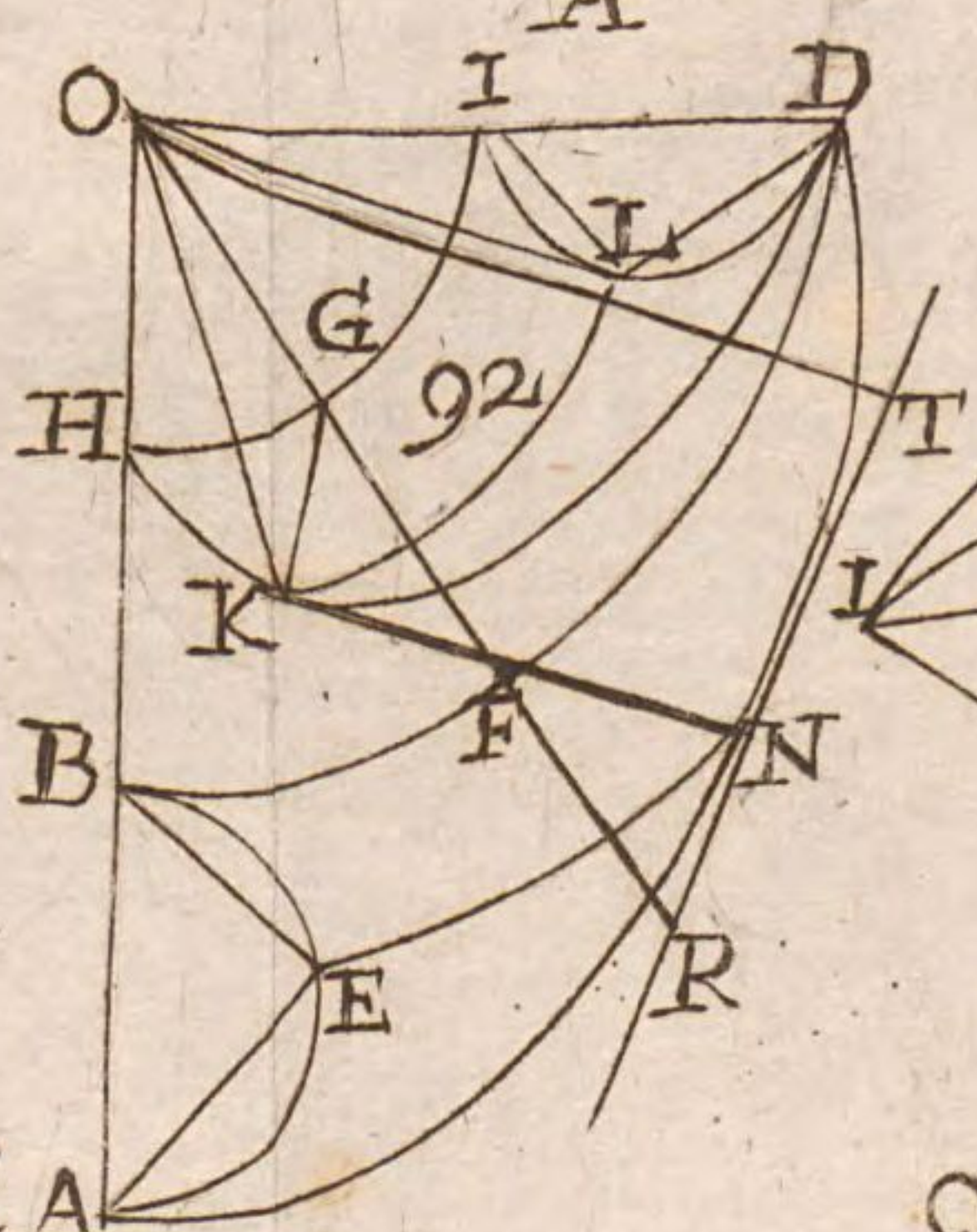
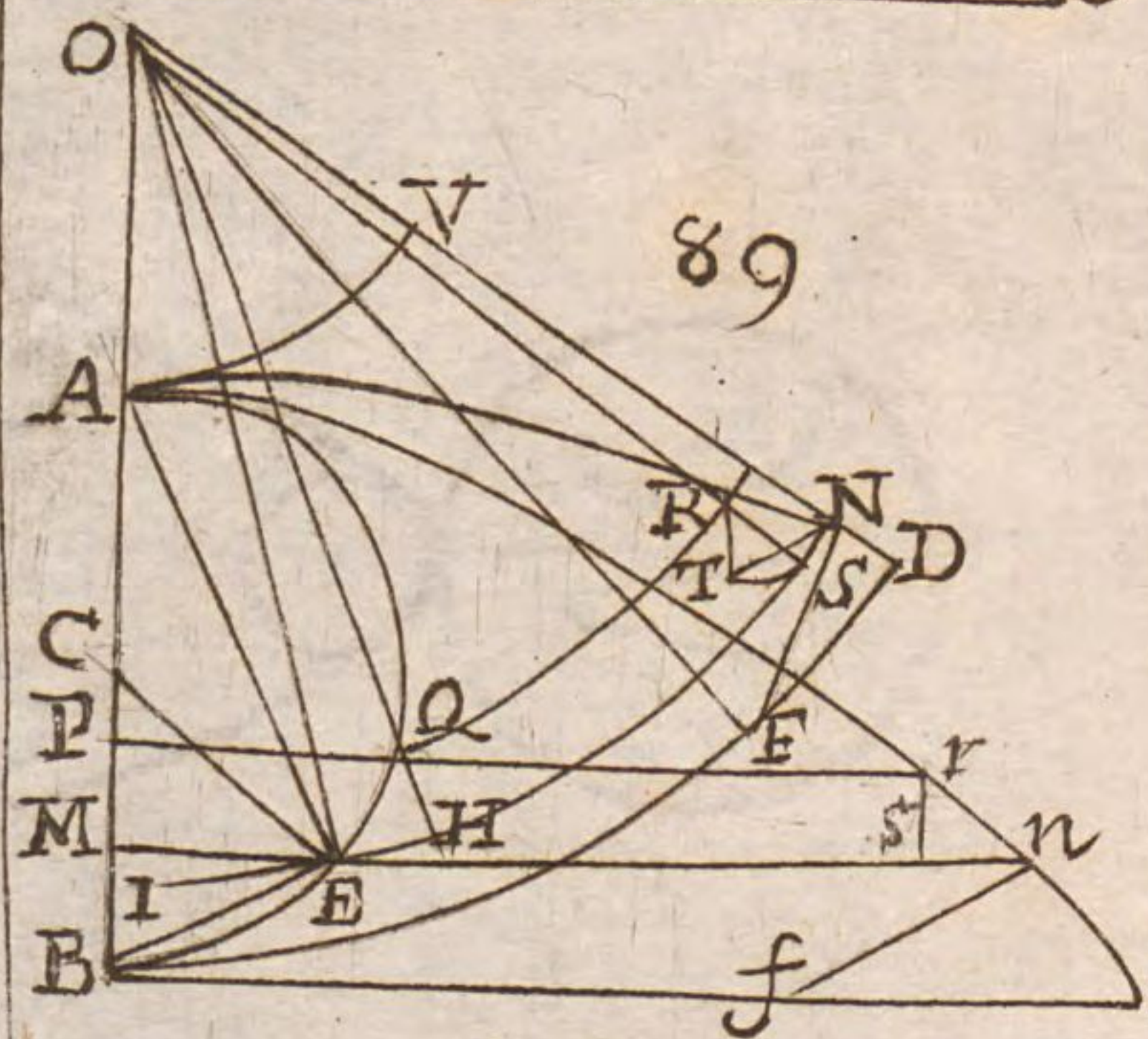
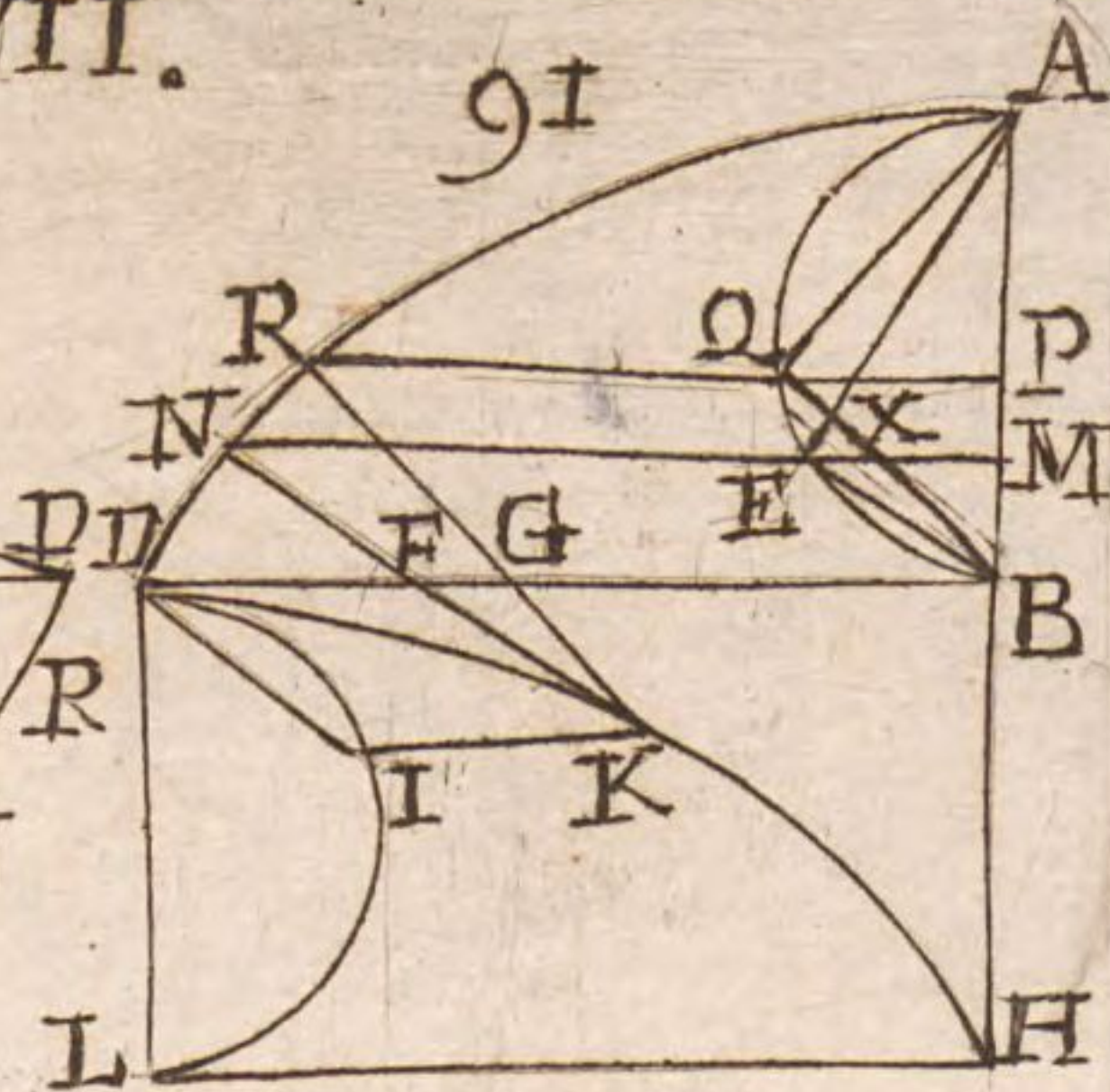
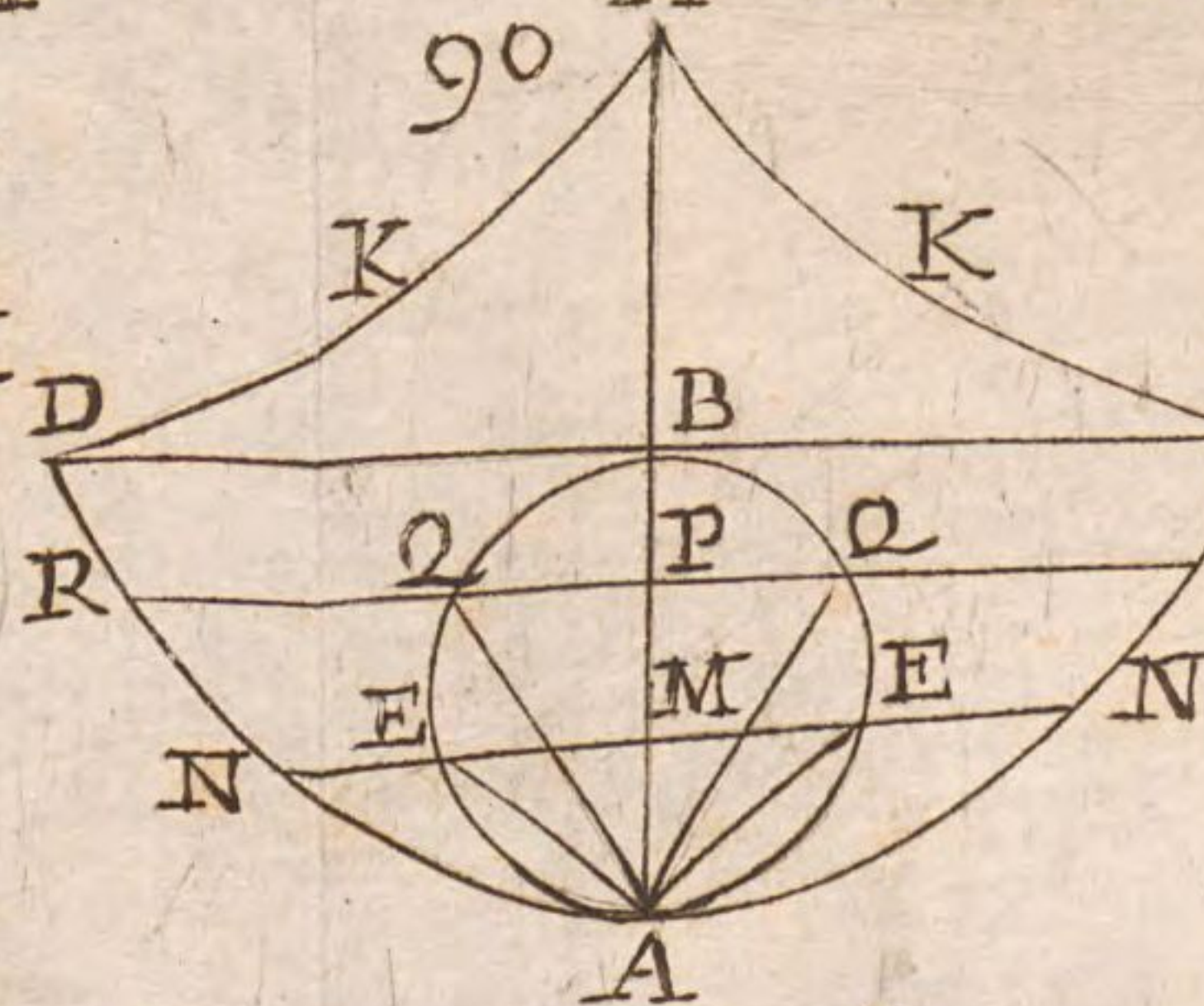
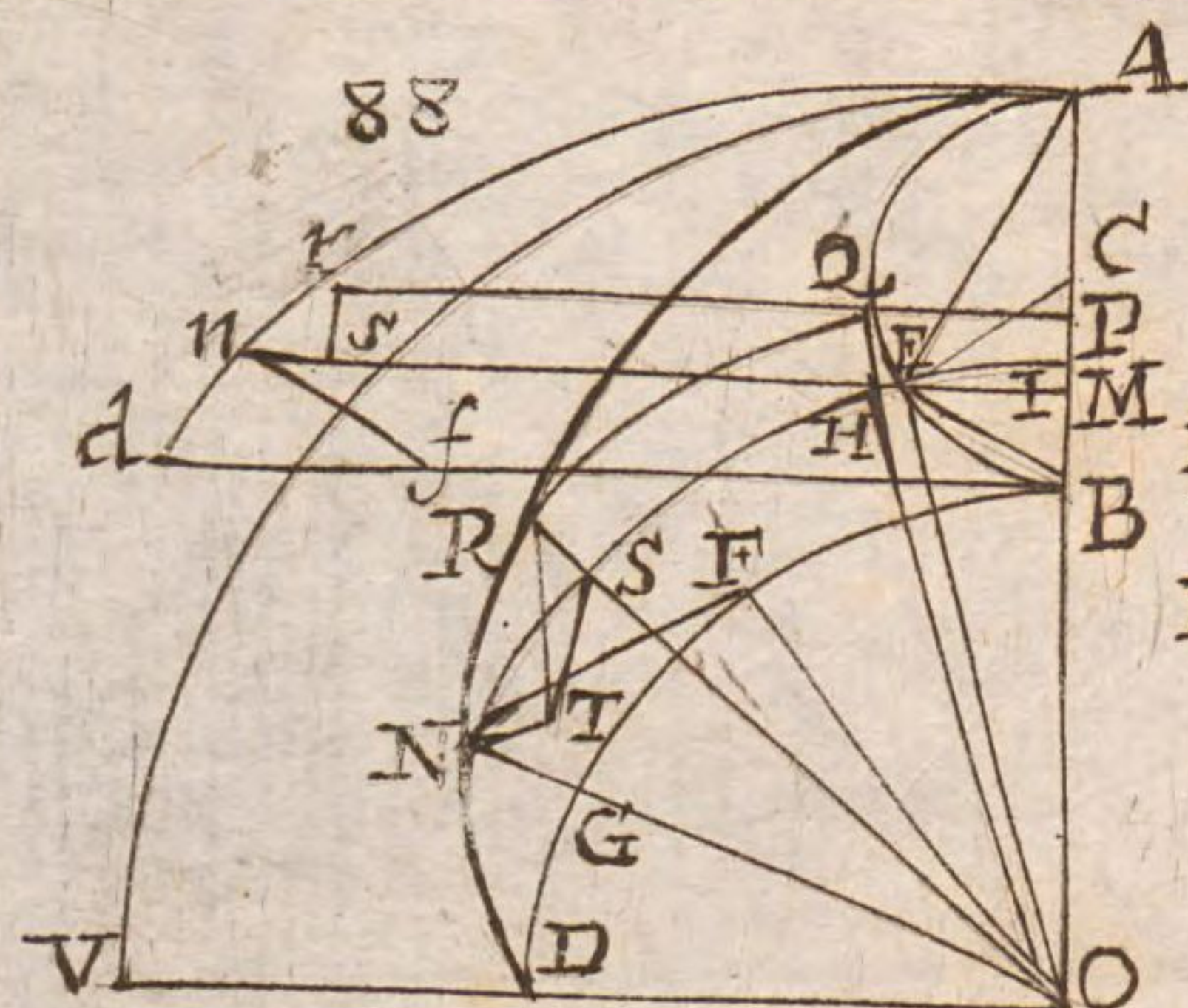


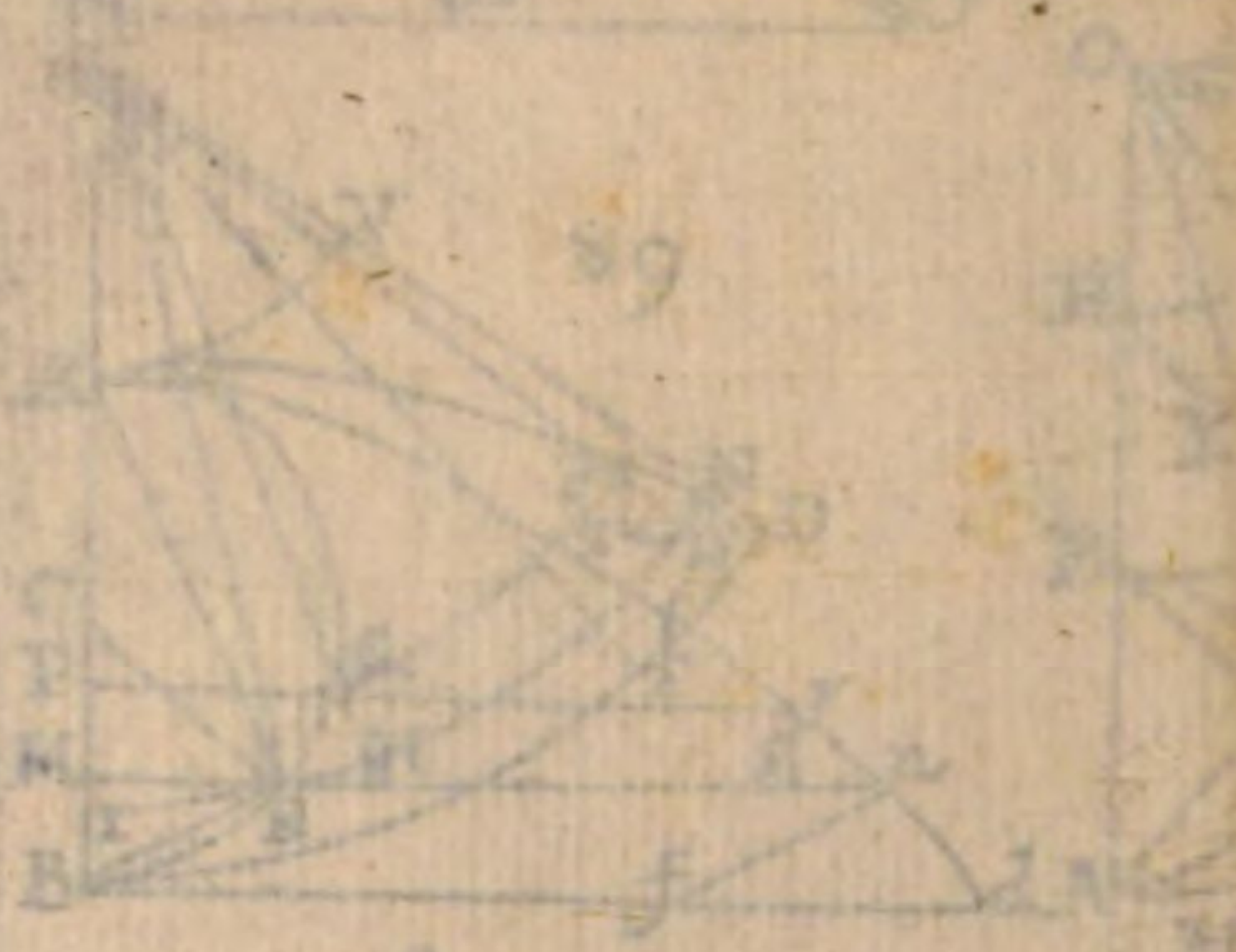
Tab. VI.



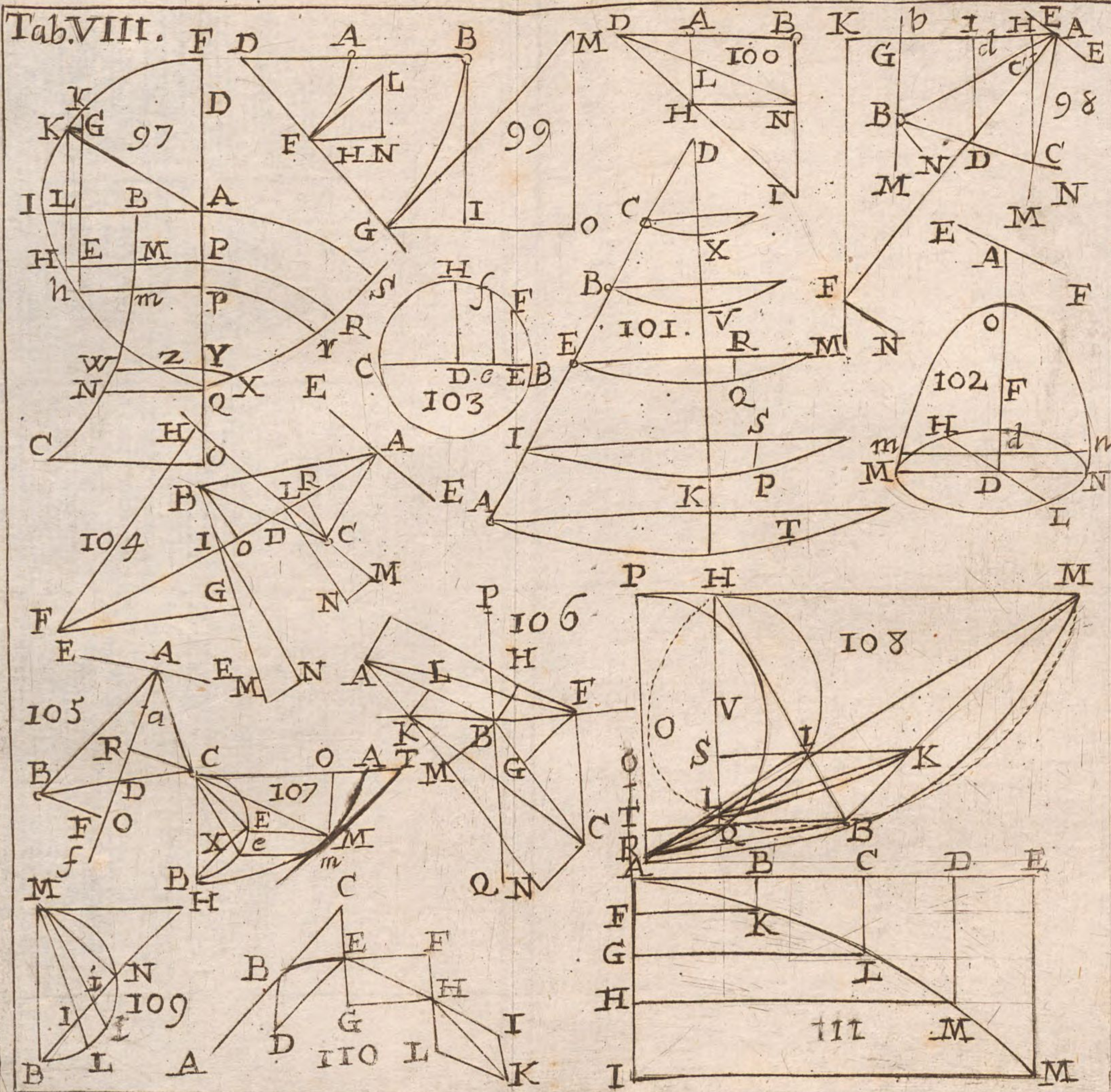


H Tab. VII.



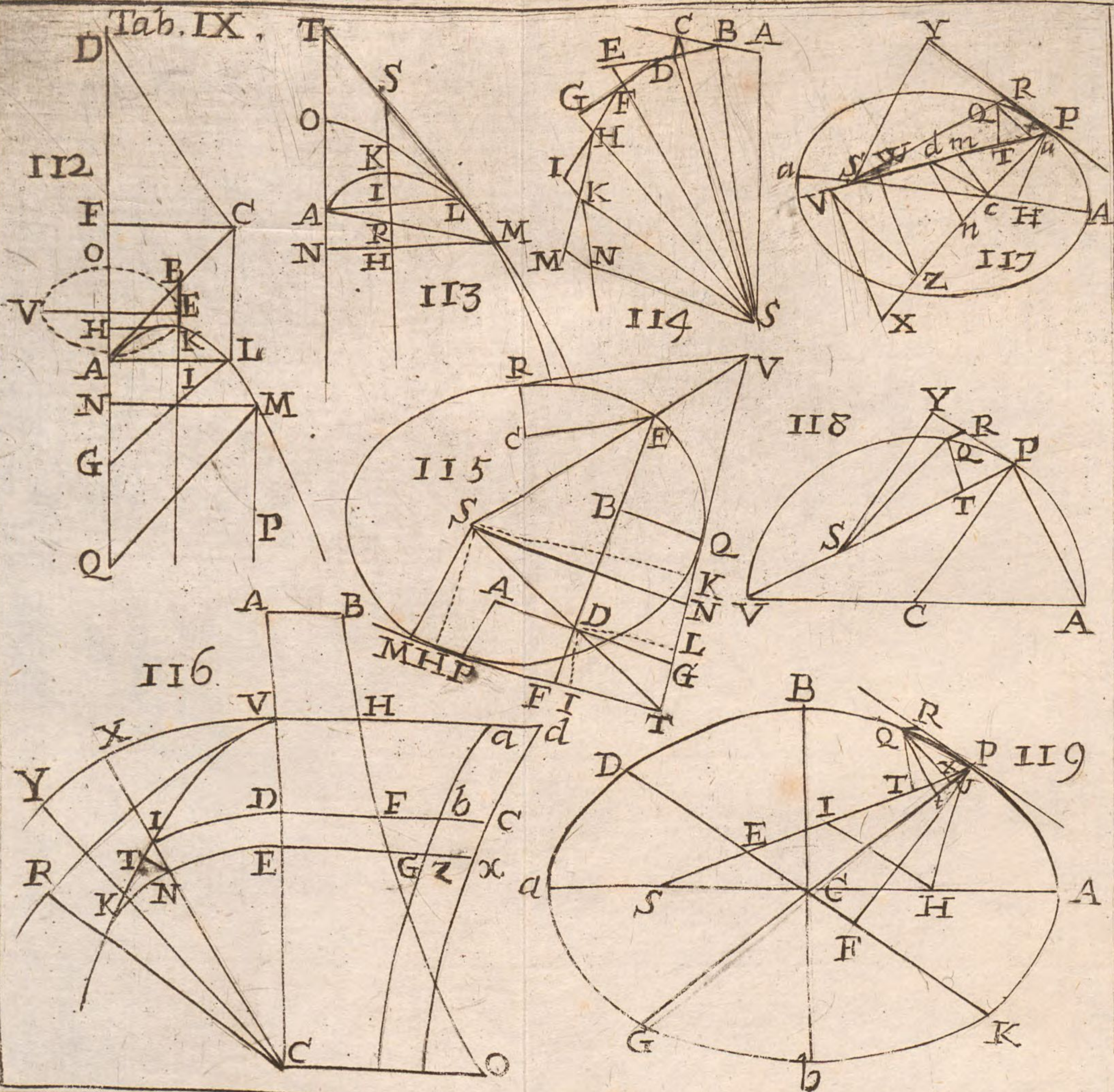


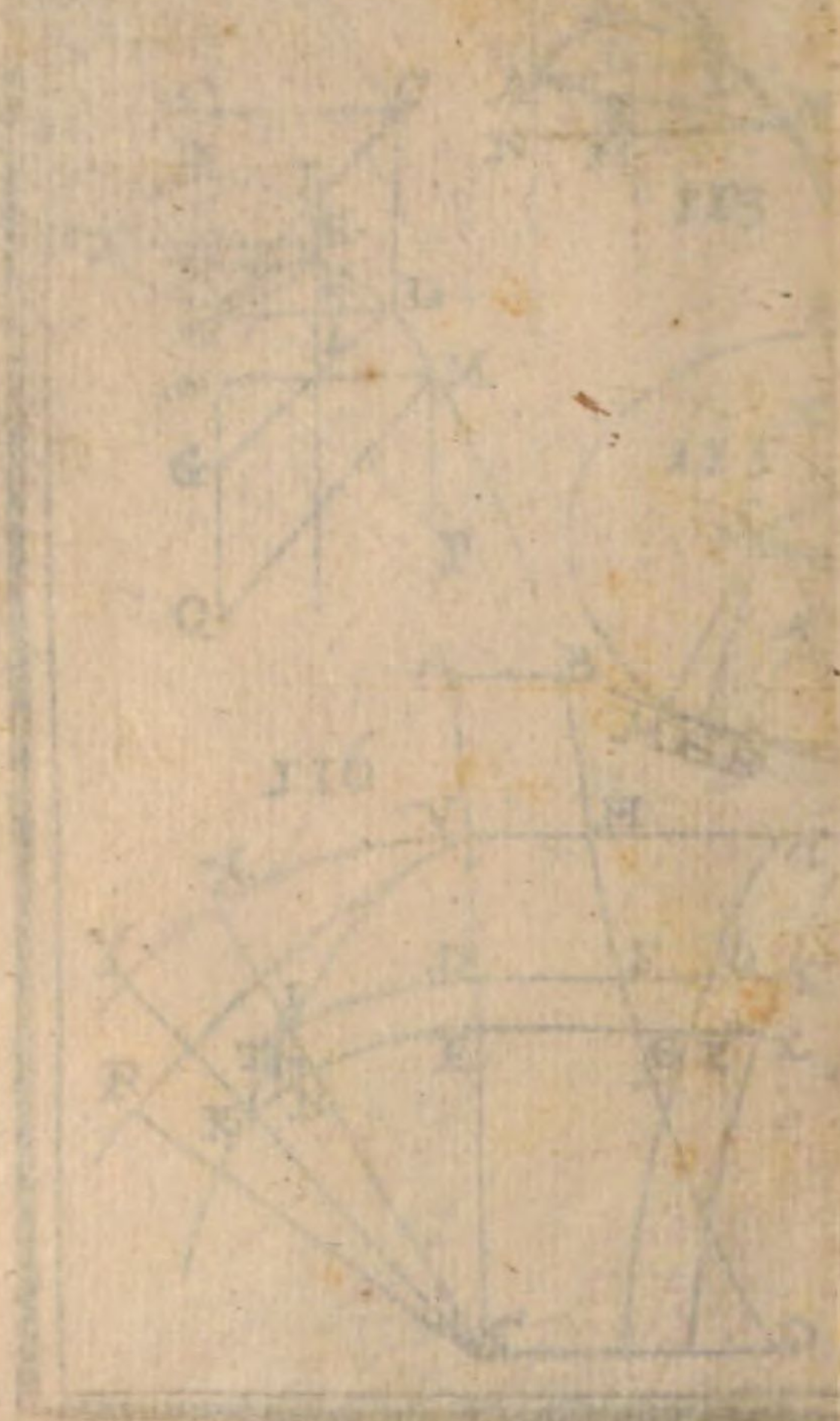
Tab.VIII.



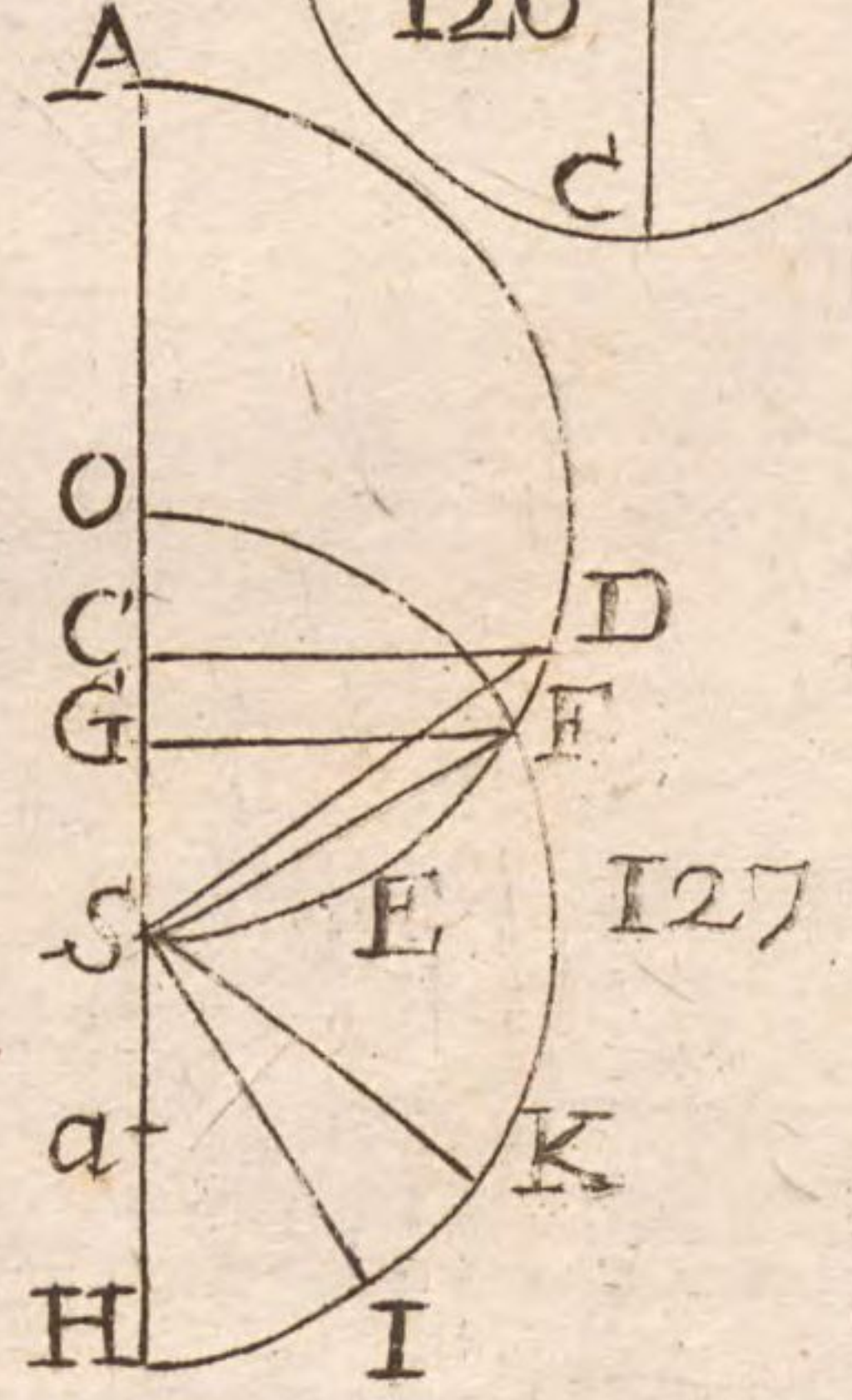
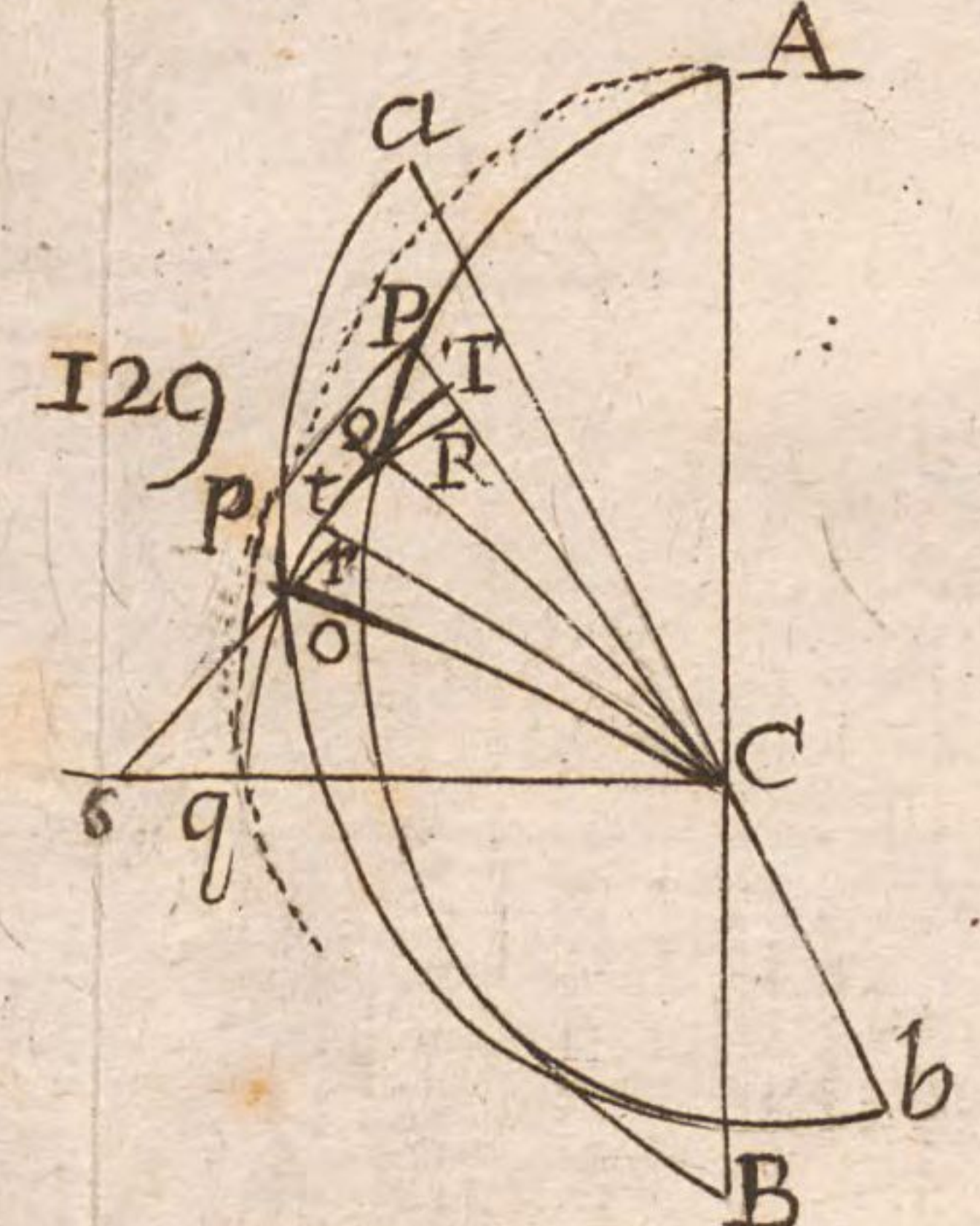
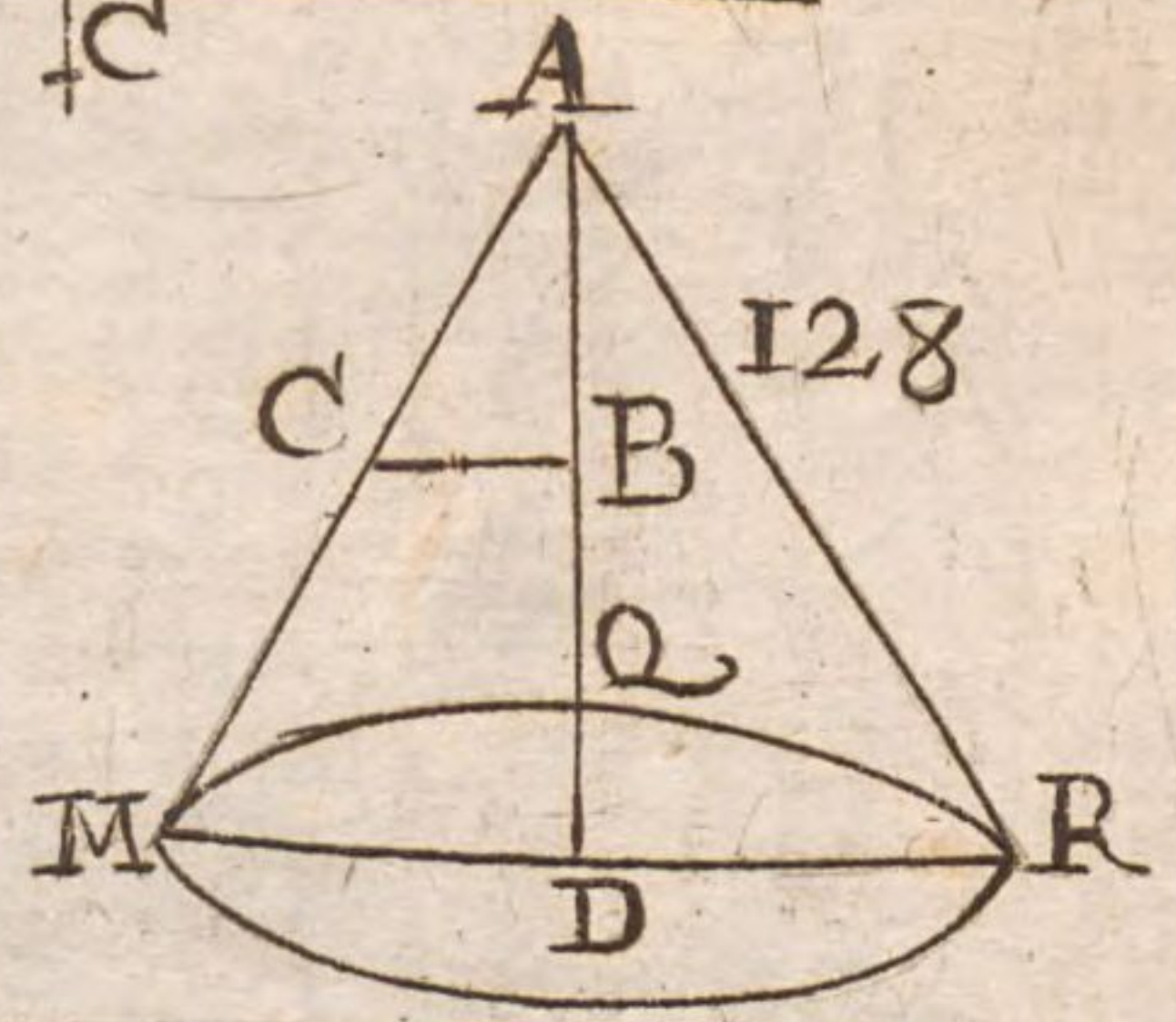
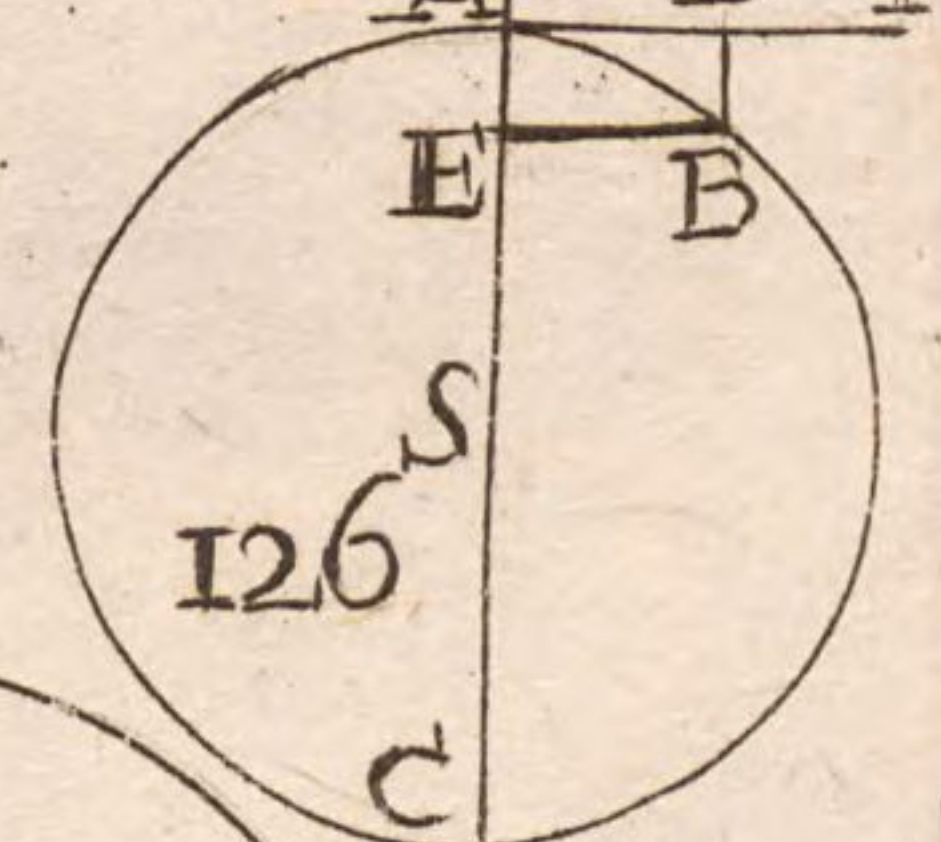
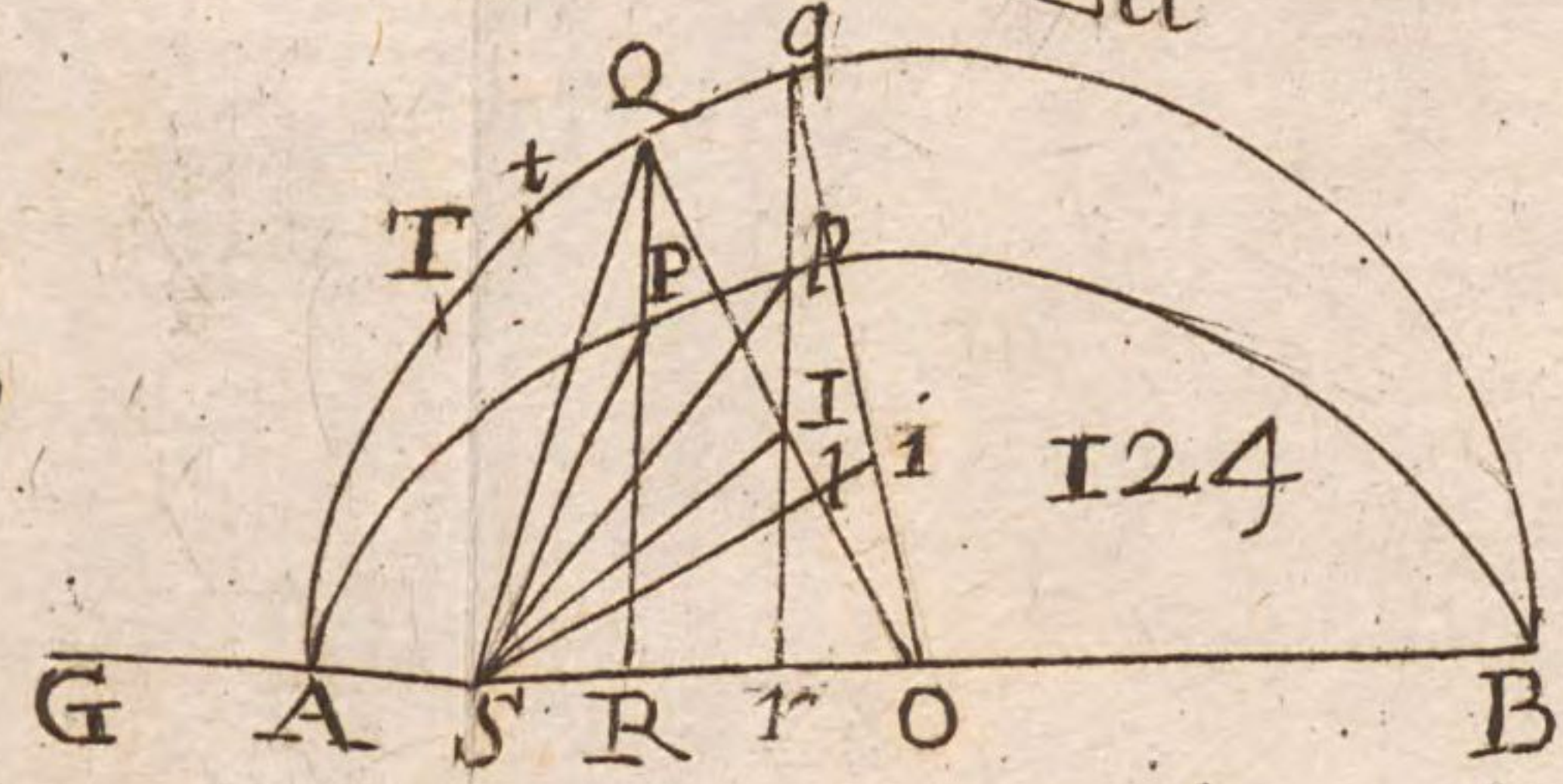
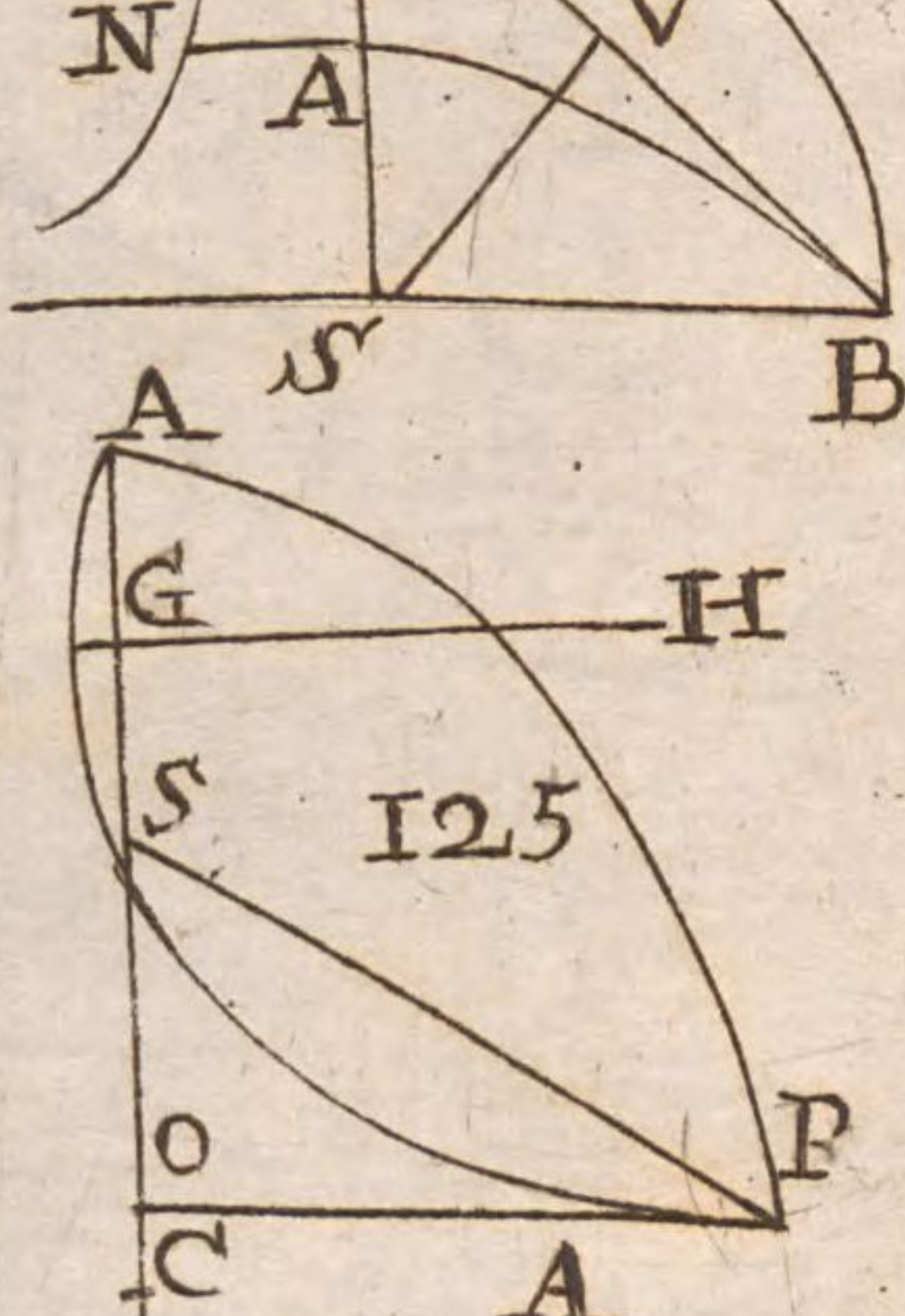
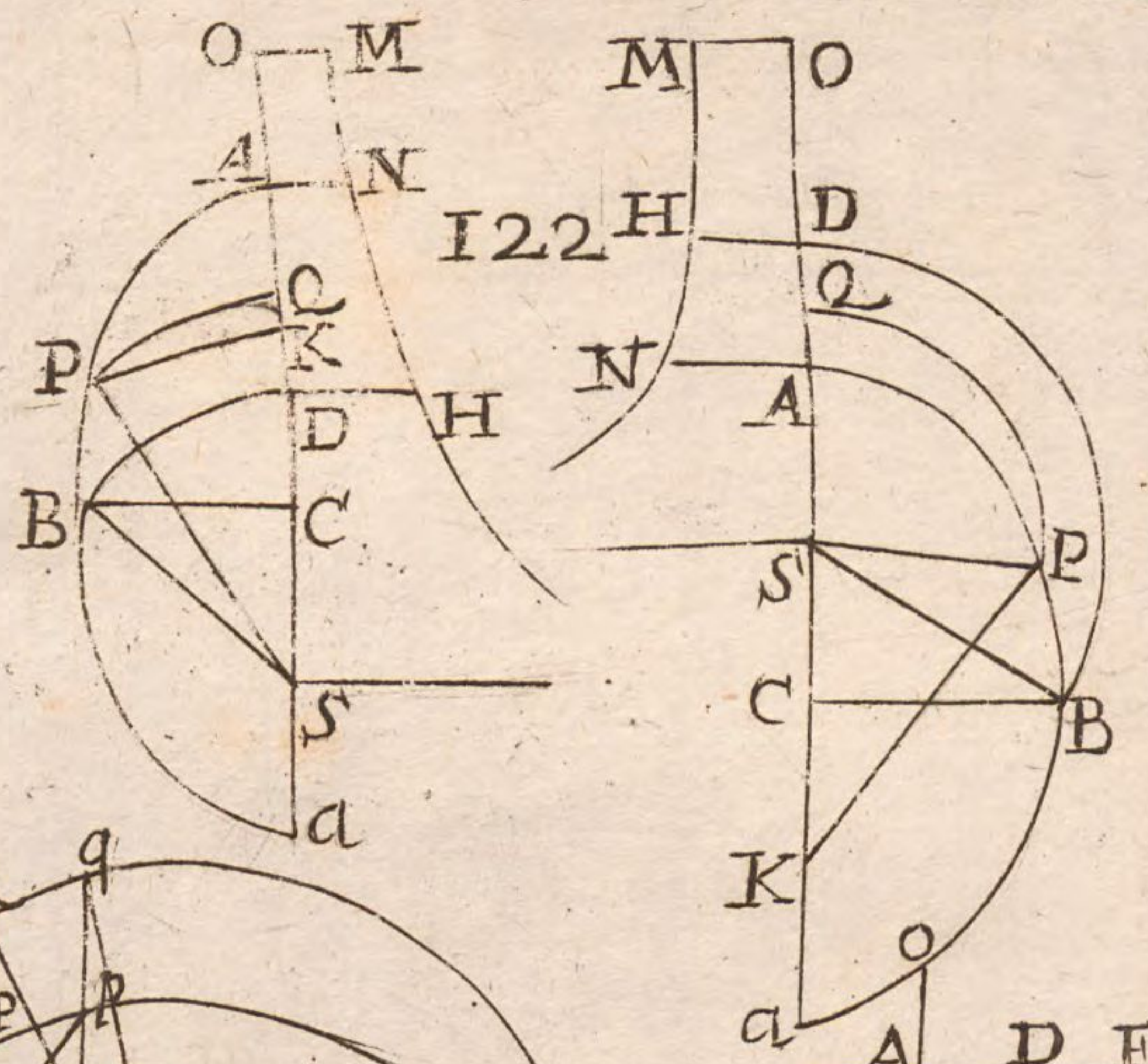
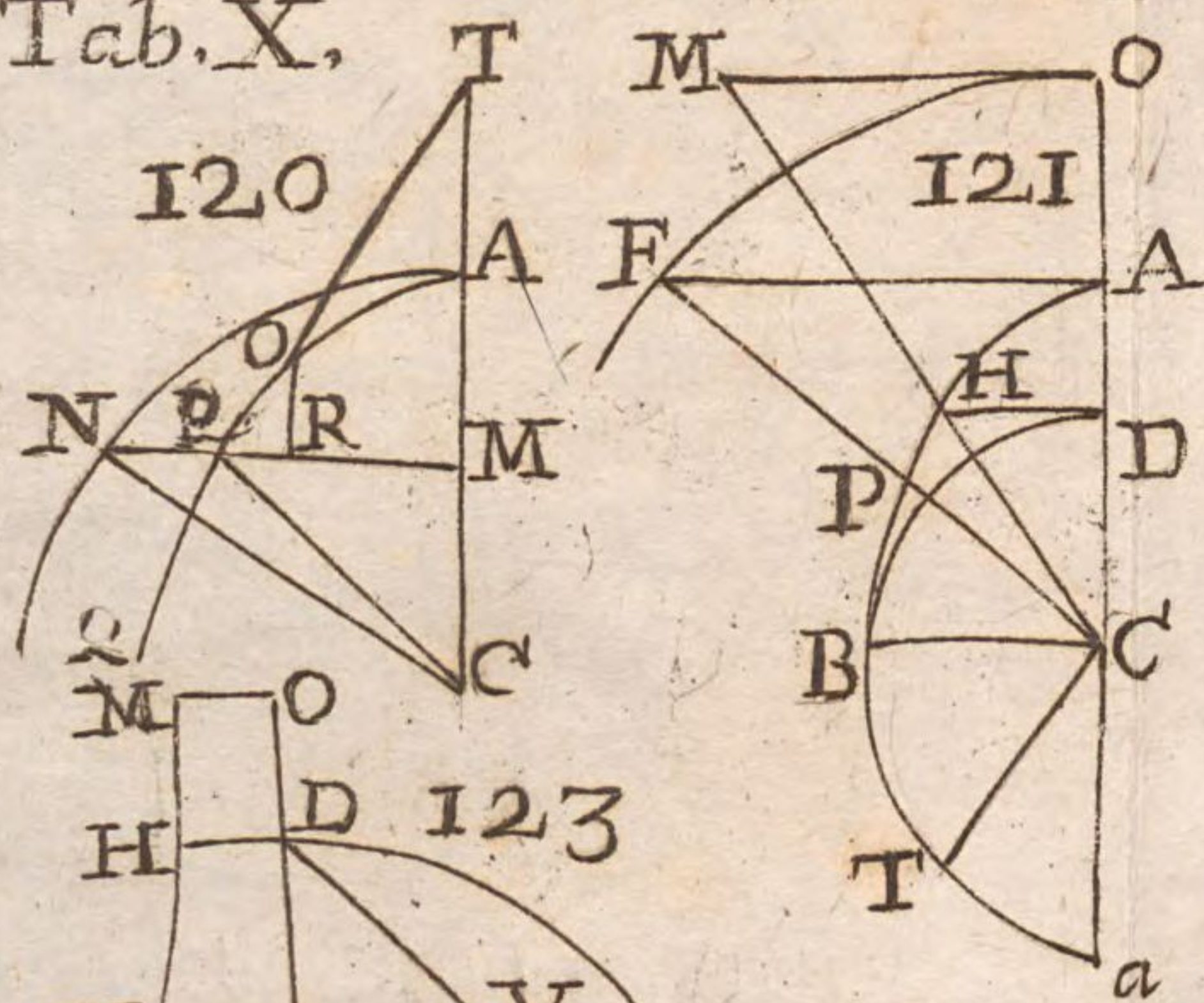


Tab. IX.

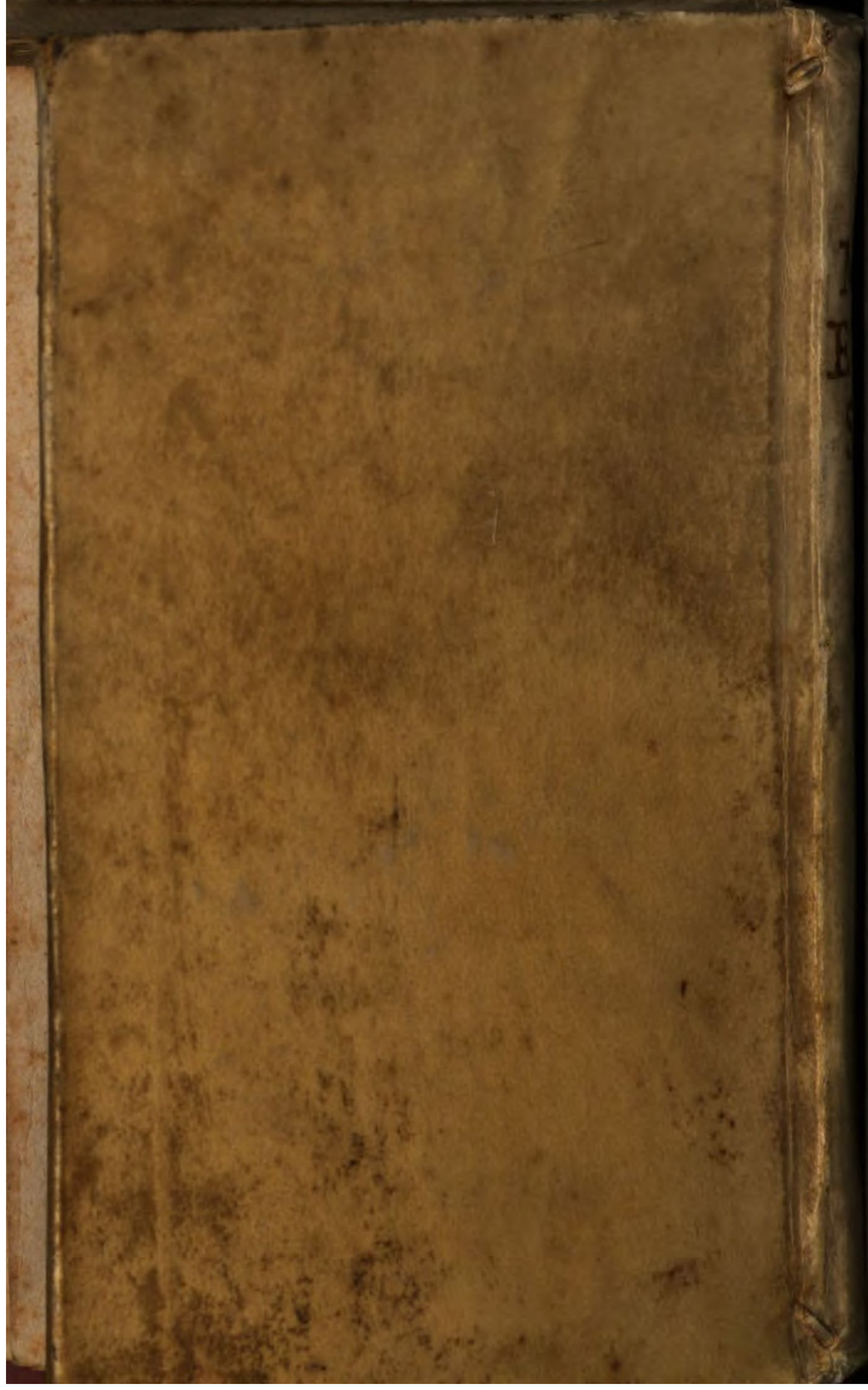




Tab. X.







Martino, Nicolò <<di>>,

Elementa Statices

Neapoli 1727

Math.a. 159 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080920-1